



Construction des lois de paroi d'ordre 1 et 2 pour des domaines rugueux par analyse asymptotique

Yves Achdou, Olivier Pironneau, Frederic Valentin

► To cite this version:

Yves Achdou, Olivier Pironneau, Frederic Valentin. Construction des lois de paroi d'ordre 1 et 2 pour des domaines rugueux par analyse asymptotique. [Rapport de recherche] RR-3357, INRIA. 1998. inria-00073332

HAL Id: inria-00073332

<https://hal.inria.fr/inria-00073332>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Construction des Lois de Paroi d'Ordre 1 et 2 pour des Domaines Rugueux par Analyse Asymptotique

Y. Achdou , O. Pironneau & F. Valentin

No 3357

12 février 1998

_____ THÈME 4 _____



*apport
de recherche*

Construction des Lois de Paroi d'Ordre 1 et 2 pour des Domaines Rugueux par Analyse Asymptotique

Y. Achdou ^{*}, O. Pironneau [†] & F. Valentin [‡]

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes

Projet M3N

Rapport de recherche n° 3357 — 12 février 1998 — 74 pages

Résumé : L'objet de ce travail est de présenter une nouvelle méthode pour construire des lois de paroi pour des domaines rugueux. La méthode est basée sur la théorie de développement asymptotique à deux échelles et est appliquée à l'équation de Laplace et aux équations de Navier-Stokes incompressibles. On construit des lois de paroi d'ordre un et d'ordre deux et on les valide en résolvant plusieurs problèmes d'intérêt pratique.

Mots-clé : loi de paroi, analyse asymptotique, Navier-Stokes, domaine rugueux, Laplace

(Abstract: pto)

^{*} e-mail: achdou@ann.jussieu.fr

[†] e-mail: pironneau@ann.jussieu.fr

[‡] The author was supported by Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) - Brazil - e-mail: frederic.valentin@inria.fr

Constructing First and Second Order Wall Laws for Rough Domains by Asymptotic Analysis

Abstract: In this paper we present a new method to construct the wall laws for rough domains. The method is based on two scales asymptotic development theory and applied for Laplace equation and incompressible Navier-Stokes equations. We construct first and second order wall laws, which are validated for several numerical problems.

Key-words: wall law, asymptotic analysis, Navier-Stokes, rough domain, Laplace

Table des matières

1	Introduction	4
2	La méthode	6
3	Application au problème de Laplace	9
3.1	Loi de paroi d'ordre 1	10
3.2	Loi de paroi d'ordre 2	12
4	Application aux équations de Navier-Stokes incompressibles	16
4.1	Loi de paroi d'ordre 1	18
4.2	Loi de paroi d'ordre 2	22
5	Validations numériques	30
5.1	Problème dégénéré: plaque plane	32
5.2	Plaque avec rugosités symétriques	36
5.3	Canal avec 2 types de rugosités	42
5.4	Diffuseur avec rugosités sinusoïdales	52
5.5	Plaque avec rugosités non-symétriques	63
6	Conclusion	69
7	Annexe : Étude du problème de cellule	70
7.1	Existence et unicité	70
7.2	Constante d'homogénéisation	72

1 Introduction

Dans ce travail, on étudie la simulation des écoulements sur des domaines rugueux. La caractéristique principale de ce type de problème est l'existence de différentes échelles de longueur dans le domaine. De ce fait, la prise en charge de l'influence des petites échelles sur les grandes est très coûteuse en 2D et pratiquement impossible en 3D, en raison de la nécessité d'un maillage très raffiné dans la couche limite contenant les rugosités.

On retrouve ces types de problèmes dans de nombreux domaines de la simulation numérique. Par exemple en aérodynamique, les parois lisses deviennent rugueuses par abrasion, ce qui change les profils de vitesse et augmente le frottement pariétal. Des parois rugueuses sont aussi utilisées pour réduire la trainée de certains avions (Airbus). Ce même type de problème est retrouvé en océanographie-météorologie où les vagues, villes et montagnes ont des influences significatives sur la simulation de la circulation atmosphérique. L'étude de la modélisation de l'influence de petits obstacles sur l'écoulement global a commencé au début du siècle par les études de Nikuradze [19]. Ces études expérimentales sont consacrées à l'influence de la forme des rugosités sur l'écoulement quand celles-ci sont disposées à la paroi d'un canal. Par la suite, ces résultats ont été étendus par Prandtl et Schlichting [20] à des écoulements sur des plaques rugueuses. De nos jours, le problème est loin d'être résolu. Plusieurs études expérimentales et plusieurs stratégies de modélisation du phénomène sont proposées (voir [16] et [14] par exemple), surtout dans le cadre des écoulements turbulents. Malheureusement jusqu'à nos jours, aucun modèle ni approche générale n'ont été établis pour simuler correctement l'impact des rugosités sur l'écoulement global.

L'approche couramment utilisée pour répondre à ce problème est l'utilisation d'une condition aux limites équivalentes (la loi de paroi) imposée à l'intérieur du domaine, reproduisant l'influence des rugosités sur la vitesse, pression et frottement. Les lois de paroi ont été jusque là utilisées pour des parois lisses afin de retirer du domaine du calcul une partie de la couche limite, coûteuse numériquement. Ces techniques ont donné de bons résultats même pour des problèmes considérés difficiles ([18] et [17]). Historiquement, les lois de paroi ont premièrement été établies dans le cadre des écoulements turbulents sur des plaques lisses [13] (lois logarithmiques). Par la suite, l'application de lois de paroi a été étendue à des domaines rugueux, en modifiant certaines constantes (voir [16] pour plusieurs références). Cependant encore une fois, l'approche manque de généralité, car elle ne peut être employée de façon systématique pour différentes formes de rugosités. De plus, ces lois de paroi ont l'handicap de maintenir un coût élevé de calcul, puisque elles sont imposées à une distance constante de la paroi : donc, même si une partie de la couche limite est retirée, les lois de paroi suivent la forme de la rugosité [25]. Finalement, il reste à établir un cadre mathématique bien défini, où on pourrait développer de nouvelles lois et étudier les erreurs d'approximation.

La première tentative d'établir une méthode plus générale pour construire des lois de paroi, a été présentée par Carrau [10] et Carrau-LeTallec [11] dans le cadre d'écoulements laminaires compressibles sur des parois rugueuses périodiques. La mé-

thode est basée sur une approche par homogénéisation, à partir de la décomposition de domaine en une partie locale, contenant des rugosités périodiques, et une partie globale où est imposée la loi de paroi. Cependant, la mise en oeuvre est coûteuse et le cadre mathématique proposé n'est pas adapté à l'analyse d'erreur. À partir de l'idée originale de Carrau-LeTallec, une deuxième approche a été proposée par Pironneau et Achdou [2] pour l'équation de Laplace. À partir de cette approche, les lois de paroi sont établies de façon analytique dans un cadre mathématique adapté à l'analyse d'erreur. Par la suite, Achdou et al. [4] l'ont étendue au problème de Stokes à l'ordre un et deux.

L'objectif de ce travail est d'introduire une nouvelle approche pour développer des lois de paroi adaptées à des domaines rugueux. Les lois de paroi sont construites dans un cadre mathématique bien défini, basé sur des développements asymptotiques à deux échelles (M.D.A.) ([21], [7], [8] et [9]). L'utilisation des M.D.A. pour développer des conditions aux limites équivalentes a été introduite par Achdou [1] et poursuivie par Zebic [5] dans le cadre des équations de Maxwell, pour traiter des obstacles contenant une fine couche de matériaux composite. L'idée était de retirer du domaine du calcul cette fine couche, en simulant son influence par le biais d'une condition aux limites équivalentes tenant compte des hétérogénéités. En utilisant la même idée de base, on commence par développer des lois de paroi d'ordre un et deux pour l'équation de Laplace, pour ensuite appliquer la stratégie pour les équations de Navier-Stokes incompressibles (voir aussi [3] et [6]). Les nouvelles lois de paroi sont générales, s'adaptant automatiquement à la forme de la rugosité par le biais de constantes d'homogénéisation calculées à partir d'un simple problème de cellule. L'application des lois de paroi ne suit pas la forme des rugosités, car on remplace le domaine rugueux par un domaine régulier.

Dans la première partie de ce travail, on présente l'idée de base de la méthode par développement asymptotique. La deuxième partie est consacrée à l'application de l'approche M.D.A. pour l'équation de Laplace, en développant des lois de paroi d'ordre un et deux, suivie d'une analyse d'erreur. Des lois de paroi d'ordre un et d'ordre deux pour les équations de Navier-Stokes sont construites dans la troisième partie. Plusieurs validations numériques sont présentées sur des domaines d'intérêt pratique. Dans la dernière partie de ce travail, on donne des conclusions et des perspectives.

2 La méthode

Par simplicité, on se place en dimension deux. L'idée principale de l'approche par M.D.A. consiste à retirer du domaine de calcul Ω la région proche de la paroi Γ_b contenant les rugosités. On introduit à l'intérieur du domaine une interface fictive Γ_0 (supposée droite) séparant le domaine en une partie globale Ω_0 et une partie locale noté Ω_w . Les sections latérales de Ω sont notées Γ_{in} et Γ_{out} et l'interface supérieure par Γ_∞ . Le domaine local contient les rugosités périodiques de dimension caractéristique ε (petit devant l'unité). On note par Ω_{loc}^ε une cellule semi-infinie contenant une rugosité, limitée inférieurement par une partie de la paroi Γ_b notée Γ_w^ε . Alors si on note les variables cartésiennes par $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$,

$$\Omega_{loc}^\varepsilon = \{(x_1, x_2), x_1 \in \text{rugosité}, x_2 \geq \Gamma_w^\varepsilon\}$$

et $\Omega = \Omega_0 \bigcup_{i=1}^{nr} \Omega_{loc}^\varepsilon$ (nr = nombre de rugosités). Le domaine Ω_{loc}^ε dilaté par un facteur $\frac{1}{\varepsilon}$ est noté par Ω_{loc} et Γ_w^ε par Γ_w , donc

$$\mathbf{x} \in \Omega_{loc}^\varepsilon \Leftrightarrow \mathbf{y} = (y_1, y_2) = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \in \Omega_{loc},$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma_w^\varepsilon \Leftrightarrow \mathbf{y} = (y_1, y_2) = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \in \Gamma_w.$$

On notera aussi par Γ_{sup} la restriction de Γ_0 à une cellule, par Γ_δ l'interface à $x_2 = \delta$, le vecteur tangentiel à Γ_0 par $\mathbf{s} = (1, 0)$ et la normale extérieure à Γ_0 par $\mathbf{n} = (0, -1)$.

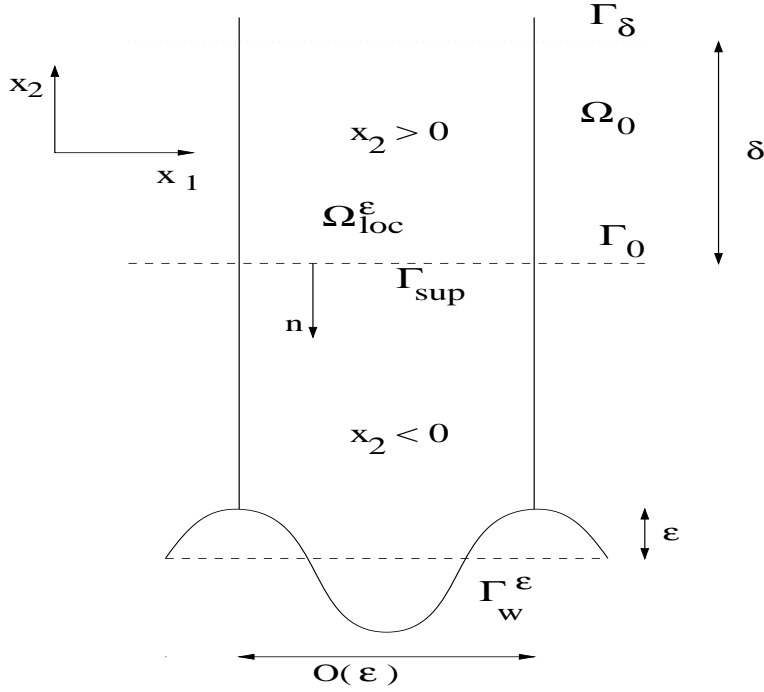


FIG. 1: Le domaine local est constitué par des cellules semi-infinies.

Les opérateurs de dérivation par rapport à \mathbf{y} , seront indexés par \mathbf{y} . L'absence de d'indice signifie que la dérivation est faite par rapport à \mathbf{x} . Donc si $u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$,

$$\begin{aligned}\nabla u &= \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{u} + \nabla \tilde{u} \\ \nabla . u &= \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{y}} . \tilde{u} + \nabla . \tilde{u} \\ \Delta u &= \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_{\mathbf{y}} \tilde{u} + \frac{2}{\varepsilon} \Delta_{\mathbf{xy}} \tilde{u} + \Delta \tilde{u}\end{aligned}\tag{1}$$

où $\Delta_{\mathbf{xy}} \tilde{u} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i}$.

Pour la simplicité de la présentation, on se place dans le cadre d'un problème aux limites linéaire elliptique, posé dans le domaine rugueux Ω . On suppose que les conditions aux limites à la paroi rugueuse et sur Γ_∞ sont de type Dirichlet homogène et on impose des conditions de périodicité en la variable x_1 sur Γ_{in} et Γ_{out} . On appelle u^ε la solution du problème. La construction des lois de paroi par analyse asymptotique pour approcher u^ε quand ε tend vers zéro, est basée sur l'introduction d'une séquence d'ansatz.

$$u_n(\mathbf{x}) = \tilde{u}_n(\mathbf{x}) + \sum_{k < n} \varepsilon^k \tilde{v}_k \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \nabla^{k+1} \tilde{u}_n|_{\Gamma_0} \right) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.\tag{2}$$

Les fonctions $\tilde{u}_n(x)$ sont définies comme étant les solutions des équations aux dérivées partielles originales dans Ω_0 , avec une condition aux limites équivalente du type Robin ou Navier,

$$\tilde{u}_n(\mathbf{x}) = \sum_{k < n} \varepsilon^k C_k \nabla^{k+1} \tilde{u}_n(\mathbf{x}), \quad \text{sur } \Gamma_0.\tag{3}$$

L'idée est de construire les correcteurs \tilde{v}_k , de façon à approcher la solution exacte u^ε par \tilde{u}_n dans Ω_0 et sur Γ_0 avec une précision d'ordre ε^n . Les correcteurs \tilde{v}_k sont définis en variable rapide \mathbf{y} , périodique dans la direction y_1 et s'annulant quand y_2 tend vers l'infini. La construction des \tilde{v}_k est faite de façon à corriger localement $u_n(\mathbf{x})$ dans Ω_{loc}^ε à l'ordre ε^n pour avoir la condition aux limites sur Γ_b à l'ordre ε^n .

La construction des ansatz est faite récursivement de la façon suivante :

- i) on suppose connus les n premiers ansatz et $\tilde{u}_n(\mathbf{x})$,
- ii) on introduit un pseudo-correcteur $v_n \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \nabla^{n+1} \tilde{u}_n|_{\Gamma_0} \right)$ défini dans Ω_{loc}^ε tel que

$$u(\mathbf{x}) = \tilde{u}_n(\mathbf{x}) + \sum_{k < n} \varepsilon^k \tilde{v}_k \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \nabla^{k+1} \tilde{u}_n|_{\Gamma_0} \right) + \varepsilon^n v_n \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \nabla^{n+1} \tilde{u}_n|_{\Gamma_0} \right)$$

satisfasse les équations aux dérivées partielles originales dans Ω et les conditions aux limites sur Γ_b à $O(\varepsilon^n)$. De plus, $v_n \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \nabla^n \tilde{u}_n|_{\Gamma_0} \right)$ satisfait une condition aux limites du type

$$\lim_{y_2 \rightarrow \infty} v_n = C_n \nabla^n \tilde{u}_n|_{\Gamma_0} = Cte \text{ (par rapport à la variable } \mathbf{y})$$

à l'infini.

iii) on utilise le fait que $\tilde{u}_{n+1} \approx \tilde{u}_n$ proche à Γ_0 et on écrit le $n + 1$ ème ansatz comme

$$\begin{aligned} u_{n+1}(\mathbf{x}) &= \tilde{u}_{n+1}(\mathbf{x}) + \sum_{k < n} \varepsilon^k \tilde{v}_k \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \nabla^{k+1} \tilde{u}_{n+1}|_{\Gamma_0} \right) + \\ &\quad + \left(\varepsilon^n v_n \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \nabla^{n+1} \tilde{u}_{n+1}|_{\Gamma_0} \right) - \varepsilon^n C_n \nabla^{n+1} \tilde{u}_{n+1}|_{\Gamma_0} \right) \\ &= \tilde{u}_{n+1}(\mathbf{x}) + \sum_{k < n} \varepsilon^k \tilde{v}_k \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \nabla^{k+1} \tilde{u}_{n+1}|_{\Gamma_0} \right) + \varepsilon^n \tilde{v}_n \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \nabla^{n+1} \tilde{u}_{n+1}|_{\Gamma_0} \right) \\ &= \tilde{u}_{n+1}(\mathbf{x}) + \sum_{k < n+1} \varepsilon^k \tilde{v}_k \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \nabla^{k+1} \tilde{u}_{n+1}|_{\Gamma_0} \right) \end{aligned} \tag{4}$$

où \tilde{u}_{n+1} est solution du problème aux dérivées partielles originales avec la loi de paroi d'ordre $n + 1$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{n+1} &= \sum_{k < n} \varepsilon^k C'_k \nabla^{k+1} \tilde{u}_{n+1} + \varepsilon^n C'_n \nabla^{n+1} \tilde{u}_{n+1} \\ &= \sum_{k < n+1} \varepsilon^{k+1} C_k \nabla^k \tilde{u}_{n+1} \end{aligned}$$

imposée sur Γ_0 .

Remarque 1 :

Les solutions u^ε et \tilde{u}_i , $i \in N^*$ sont des perturbations de la solution \tilde{u}_0 . Cette supposition peut être rigoureusement prouvée dans les cas linéaires et sera démontrée pour le problème de Laplace dans la prochaine section. Dans [4] une analyse d'erreur pour le problème de Stokes est présentée, basée sur une approche par décomposition de domaine.

Remarque 2 :

Par simplicité, on a choisi de travailler en dimension deux. Évidemment, tous les résultats peuvent être généralisés en dimension trois.

Par la suite, on s'intéresse à appliquer cet algorithme au problème de Laplace et aux équations de Navier-Stokes, afin de développer des lois de paroi d'ordre un et deux.

3 Application au problème de Laplace

Soit $u^\varepsilon(\mathbf{x})$ solution du problème de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon = f & \text{dans } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_b, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_\infty, \\ u^\varepsilon & \text{périodique,} \end{cases} \quad (5)$$

avec $f(\mathbf{x})$ 'suffisamment régulière', dont le support n'intercepte pas Γ_0 .

On écrit la solution exacte u^ε par le développement asymptotique à deux échelles

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \approx \tilde{u}(\mathbf{x}) + \varepsilon \tilde{v}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \tilde{v}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^3 \tilde{v}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dots$$

et on le substitue dans (5). Alors,

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} (-\Delta_{\mathbf{y}} \tilde{v}_0) + (-\Delta_{\mathbf{x}} \tilde{u}(\mathbf{x}) - f) + (-\Delta_{\mathbf{y}} \tilde{v}_1) + \\ + (-2\Delta_{\mathbf{xy}} \tilde{v}_0) + \varepsilon (-2\Delta_{\mathbf{xy}} \tilde{v}_1) + \varepsilon (-\Delta_{\mathbf{y}} \tilde{v}_2) + \varepsilon^2 \dots = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{u}(\mathbf{x}) + \varepsilon \tilde{v}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \tilde{v}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^3 \tilde{v}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dots = 0 & \text{sur } \Gamma_b. \end{cases} \quad (6)$$

On est prêt à commencer la construction des ansatz. On remarque d'abord qu'à l'ordre zero, on a pas de correcteur, alors

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \approx \tilde{u}_0(\mathbf{x}) \text{ dans } \Omega,$$

avec $\tilde{u}_0(\mathbf{x})$ solution du problème de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u}_0 = f & \text{dans } \Omega_0, \\ \tilde{u}_0 = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \tilde{u}_0 = 0 & \text{sur } \Gamma_\infty, \\ \tilde{u}_0 & \text{périodique.} \end{cases} \quad (7)$$

Cette approximation s'avère insuffisante pour des rugosités de dimensions plus importantes. En effet, le résultat de convergence suivant a été établi dans [1]

Lemme 1 (ordre zéro)

La solution \tilde{u}_0 converge fortement dans $H^1(\Omega)$ vers u^ε et

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_0\|_{1,\Omega} \leq c \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

avec c indépendante de ε .

Démonstration: voir [1]

On s'intéresse donc à développer des approximations d'ordre plus élevé en introduisant des correcteurs, en particulier des approximations à l'ordre un et deux.

3.1 Loi de paroi d'ordre 1

L'objectif est de construire une approximation de la solution exacte u^ε dans Ω , de façon à ce que l'erreur soit de l'ordre de ε dans la norme $H^1(\Omega)$. On débute l'approximation par l'introduction d'un pseudo-correcteur $v_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ défini dans Ω_{loc}^ε , tel que

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \approx u(\mathbf{x}) = \tilde{u}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon v_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ dans } \Omega,$$

à l'ordre ε .

Comme la fonction u doit introduire une correction d'ordre ε dans le domaine local Ω_{loc}^ε , le nouveau pseudo-correcteur v_0 satisfait

$$-\Delta_{\mathbf{y}} v_0 = 0, \text{ dans } \Omega_{loc}^\varepsilon. \quad (8)$$

De plus, la condition aux limites à la paroi $u^\varepsilon = 0$ doit être satisfaite à l'ordre ε et donc

$$\tilde{u}_0 + \varepsilon v_0 = 0 \text{ sur } \Gamma_b, \quad (9)$$

avec la condition aux limites à l'infini

$$\lim_{y_2 \rightarrow \infty} v_0 = C_0 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} = Cte. \quad (10)$$

On remarque que, si on étend \tilde{u}_0 à la paroi Γ_b par un développement de Taylor, la condition aux limites (9) s'écrit

$$\varepsilon v_0|_{\Gamma_b} = -\tilde{u}_0|_{\Gamma_b} = -\tilde{u}_0|_{\Gamma_0} + \varepsilon \frac{x_2}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} = \varepsilon y_2 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0}$$

et donc

$$v_0(x_1, \mathbf{y}) = y_2 \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \text{ sur } \Gamma_w^\varepsilon. \quad (11)$$

Le nouveau pseudo-correcteur v_0 doit à la fois être solution de l'équation de Laplace (8), avec les conditions aux limites (10) et (11). Donc par linéarité, on définit

$$v_0(x_1, \mathbf{y}) = \chi^0(\mathbf{y}) \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \text{ dans } \Omega_{loc}^\varepsilon,$$

avec $\chi^0(\mathbf{y})$ solution du problème de Laplace

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta_{\mathbf{y}} \chi^0 &= 0 & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \chi^0|_{\Gamma_w} &= y_2, \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \chi^0 &= \bar{\chi}^0 = Cte, \\ \chi^0 & \text{y}_1 - \text{périodique.} \end{array} \right. \quad (12)$$

Finalement, le nouvel ansatz est donné par

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x}) &= \tilde{u}_1 + \varepsilon (\chi^0 - \overline{\chi^0}) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \\ &= \tilde{u}_1 + \varepsilon \tilde{v}_0 \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \quad (13)$$

où \tilde{u}_1 est l'approximation à l'ordre un de u^ε dans Ω_0 , solution du problème de Laplace

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \tilde{u}_1 = f & \text{dans } \Omega_0, \\ \tilde{u}_1 = \varepsilon \overline{\chi^0} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n}} & \text{sur } \Gamma_0, \\ \tilde{u}_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_\infty, \\ \tilde{u}_1 & \text{périodique.} \end{array} \right. \quad (14)$$

L'erreur d'approximation de u^ε par u_1 est de l'ordre de $O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right)$, comme le montre le résultat suivant :

Lemme 2 (ordre un)

La solution u_1 converge fortement dans $H^1(\Omega)$ vers u^ε et

$$\|u^\varepsilon - u_1\|_{1,\Omega} \leq c \varepsilon^{\frac{3}{2}}$$

avec la constante c indépendante de ε

Démonstration :

Soit la fonction erreur e définie par $e(\mathbf{x}) = u^\varepsilon(\mathbf{x}) - \tilde{u}_1(\mathbf{x}) - \varepsilon \tilde{v}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$. Alors e satisfait le problème de Laplace

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta e = O(1) & \text{dans } \Omega, \\ e = O(\varepsilon^2) & \text{sur } \Gamma_b. \end{array} \right. \quad (15)$$

Mais le terme de droite de (15) est de l'ordre $O(1)$ et on doit donc le corriger en faisant un pas en avant dans le développement asymptotique. Soit $\tilde{e}(\mathbf{x}) = e(\mathbf{x}) - \varepsilon^2 \chi^1\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0}$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ où la fonction χ^1 est la solution du problème de Laplace

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta_{\mathbf{y}} \chi^1 = 2 \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \chi^1 = 0 & \text{sur } \Gamma_w, \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \chi^1 = Cte, \\ \chi^1 & y_1 - \text{périodique.} \end{array} \right.$$

Alors la fonction \tilde{e} satisfait

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{e} = O(\varepsilon) & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{e} = O(\varepsilon^2) & \text{sur } \Gamma_b, \end{cases}$$

mais la norme L^2 du second membre de l'E.D.P. est de l'ordre de $O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$ car il est localisé près de la paroi dans une couche de taille $O(\varepsilon)$.

Donc

$$\|\tilde{e}\|_{1,\Omega} \leq c\varepsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (16)$$

De plus, pour les mêmes raisons,

$$\varepsilon^2 \left\| \chi^1 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} \Big|_{\Gamma_0} \right\|_{1,\Omega} \leq c\varepsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (17)$$

Finalement par l'inégalité triangulaire,

$$\|e\|_{1,\Omega} = \left\| \tilde{e} + \varepsilon^2 \chi^1 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} \Big|_{\Gamma_0} \right\|_{1,\Omega} \leq \|\tilde{e}\|_{1,\Omega} + \varepsilon^2 \left\| \chi^1 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} \Big|_{\Gamma_0} \right\|_{1,\Omega} \leq c\varepsilon^{\frac{3}{2}}$$

□

Remarque 3 :

Il est possible d'imposer la loi de paroi d'ordre un (14) sur Γ_δ en modifiant la constante d'homogénéisation. En effet, par un développement de Taylor sur \tilde{u}_1 , la loi de paroi d'ordre un devient

$$\tilde{u}_1|_{\Gamma_\delta} = (\varepsilon \bar{\chi}^0 - \delta) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_\delta},$$

en négligeant les termes d'ordre inférieur à ε^2 .

Dans le cas particulier d'une plaque plane, le problème de cellule devient 1D et la constante d'homogénéisation est donnée analytiquement par $\bar{\chi}_0 = 0$. Alors la loi de paroi d'ordre un s'écrit simplement comme

$$\tilde{u}_1|_{\Gamma_\delta} + \delta \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_\delta} = 0.$$

3.2 Loi de paroi d'ordre 2

On effectue une étape de plus dans le procédé récursif de façon à obtenir une condition aux limites équivalente au deuxième ordre. Il s'agit de diminuer l'erreur à l'ordre ε^2 dans la norme $H^1(\Omega)$.

La première phase est d'introduire un nouveau pseudo-correcteur $v_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ défini dans Ω_{loc}^ε et d'approcher $u^\varepsilon(\mathbf{x})$ par

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) \approx u(\mathbf{x}) = \tilde{u}_1(\mathbf{x}) + \varepsilon \tilde{v}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 v_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ dans } \Omega.$$

La fonction u doit satisfaire (6) à l'ordre ε^2 avec la condition aux limites à la paroi

$$\tilde{u}_1(\mathbf{x}) + \varepsilon \tilde{v}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 v_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \text{ sur } \Gamma_b. \quad (18)$$

Par l'expression du premier correcteur dans (13) on a :

$$\begin{aligned} -\Delta_{\mathbf{y}} \tilde{v}_0 &= -\Delta_{\mathbf{y}} \chi^0 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} - 2\varepsilon \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} - \varepsilon^2 \chi^0 \frac{\partial^3 \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}^2}|_{\Gamma_0} \\ &= -\varepsilon 2 \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} - \varepsilon^2 \chi^0 \frac{\partial^3 \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}^2}|_{\Gamma_0} \text{ dans } \Omega_{loc}^\varepsilon, \end{aligned}$$

alors le pseudo-correcteur y_1 -périodique v_1 , doit être solution de l'équation

$$-\Delta_{\mathbf{y}} v_1 = 2 \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} \text{ dans } \Omega_{loc}^\varepsilon, \quad (19)$$

avec la condition aux limites à l'infini

$$\lim_{y_2 \rightarrow \infty} v_1 = C_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} = Cte. \quad (20)$$

En procédant de la même façon qu'à l'ordre un, on étend $\tilde{u}_1(\mathbf{x})$ à Γ_b par un développement de Taylor et on réécrit (18) comme

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 v_1|_{\Gamma_b} &= -\tilde{u}_1|_{\Gamma_b} - \varepsilon \tilde{v}_0|_{\Gamma_b} \\ &= -\tilde{u}_1|_{\Gamma_0} - \varepsilon \tilde{v}_0|_{\Gamma_0} + \varepsilon \frac{x_2}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} - \varepsilon^2 \frac{x_2^2}{2\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n}^2}|_{\Gamma_0} \\ &= -\varepsilon^2 \frac{x_2^2}{2\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n}^2}|_{\Gamma_0} \\ &= -\varepsilon^2 \frac{y_2^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n}^2}|_{\Gamma_0}, \end{aligned}$$

Cependant, en utilisant l'équation de Laplace (5) et en dérivant deux fois la loi de paroi d'ordre un (14) par rapport à \mathbf{s} ,

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n}^2}|_{\Gamma_0} = \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{s}^2}|_{\Gamma_0} \approx O(\varepsilon)$$

et donc à l'ordre deux, on a simplement

$$v_1(x_1, \mathbf{y}) = 0 \text{ sur } \Gamma_w^\varepsilon. \quad (21)$$

Alors le nouveau pseudo-correcteur v_1 est solution du problème de Laplace (19), avec la condition aux limites à l'infini (20) et la condition aux limites (21) à la paroi. Donc par linéarité, v_1 s'écrit comme

$$v_1(x_1, \mathbf{y}) = \chi_1(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} \text{ dans } \Omega_{loc}^\varepsilon,$$

où le nouveau correcteur χ^1 est solution du problème de Laplace

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta_{\mathbf{y}} \chi^1 &= 2 \frac{\partial \chi^0}{\partial y_1} \quad \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \chi^1|_{\Gamma_w} &= 0, \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \chi^1 &= \bar{\chi}^1 = Cte, \\ \chi^1 & \text{ } y_1 - \text{périodique.} \end{array} \right. \quad (22)$$

Finalement, le nouveau ansatz à l'ordre deux s'écrit comme

$$\begin{aligned} u_2(\mathbf{x}) &= \tilde{u}_2 + \varepsilon \tilde{v}_0 + \varepsilon^2 (\chi^1 - \bar{\chi}^1) \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} \\ &= \tilde{u}_2 + \varepsilon \tilde{v}_0 + \varepsilon^2 \tilde{v}_1 \text{ dans } \Omega, \end{aligned}$$

où \tilde{u}_2 est l'approximation à l'ordre deux de u^ε dans Ω_0 , solution du problème de Laplace

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \tilde{u}_2 &= f \quad \text{dans } \Omega_0, \\ \tilde{u}_2 &= \varepsilon \bar{\chi}_0 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \mathbf{n}} + \varepsilon \bar{\chi}_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ \tilde{u}_2 &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_\infty, \\ \tilde{u}_2 & \text{ } \text{périodique.} \end{array} \right. \quad (23)$$

L'erreur d'approximation de la solution exacte par u_2 dans Ω est de l'ordre $O\left(\varepsilon^{\frac{5}{2}}\right)$, comme le montre le résultat suivant

Lemme 3 (ordre deux)

La solution u_2 converge fortement dans $H^1(\Omega)$ vers u^ε et

$$\|u^\varepsilon - u_2\|_{1,\Omega} \leq c \varepsilon^{\frac{5}{2}},$$

avec la constante indépendante de ε .

Démonstration :

De façon analogue à l'ordre un, soit $e(\mathbf{x}) = u^\varepsilon(\mathbf{x}) - \tilde{u}_2(\mathbf{x}) - \varepsilon \tilde{v}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \varepsilon^2 \tilde{v}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Alors e satisfait le problème de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta e &= O(\varepsilon) & \text{dans } \Omega, \\ e &= O(\varepsilon^3) & \text{sur } \Gamma_b. \end{cases} \quad (24)$$

Le terme de droite de (24) étant d'ordre $O(\varepsilon)$, on effectue un pas en avant dans le développement asymptotique. On remarque d'abord, qu'en dérivant la loi de paroi d'ordre deux trois fois par rapport à \mathbf{s} et en utilisant l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^3 \tilde{u}_2}{\partial \mathbf{n}^2 \partial \mathbf{s}} \Big|_{\Gamma_0} = O(\varepsilon)$$

et donc ce terme ne doit pas être corrigé à l'ordre ε^2 .

Soit $\tilde{e}(\mathbf{x}) = e(\mathbf{x}) - \varepsilon^3 \eta \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^3 \tilde{u}_2}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}^2} \Big|_{\Gamma_0}$, où la fonction η est définie dans Ω_{loc} , solution du problème de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{y}} \eta &= \chi^0 & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \eta &= 0 & \text{sur } \Gamma_w, \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \eta &= Cte, \\ \eta & & y_1 - \text{périodique.} \end{cases}$$

Alors \tilde{e} satisfait

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{e} &= O(\varepsilon^2) & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{e} &= O(\varepsilon^3) & \text{sur } \Gamma_b, \end{cases}$$

mais la norme L^2 du second membre de l'E.D.P. est de l'ordre de $O(\varepsilon^{\frac{5}{2}})$ car il est localisé près de la paroi dans une couche de taille $O(\varepsilon)$. Donc $\|\tilde{e}\|_{1,\Omega} \leq c\varepsilon^{\frac{5}{2}}$ et pour les mêmes raisons, $\varepsilon^3 \left\| \eta \frac{\partial^3 \tilde{u}_2}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}^2} \Big|_{\Gamma_0} \right\|_{1,\Omega} \leq c\varepsilon^{\frac{5}{2}}$.

$$\begin{aligned} \text{Finalement par construction et par l'inégalité triangulaire, } \|e\|_{1,\Omega} &= \left\| \tilde{e} + \varepsilon^3 \eta \frac{\partial^3 \tilde{u}_2}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}^2} \Big|_{\Gamma_0} \right\|_{1,\Omega} \leq \\ \| \tilde{e} \|_{1,\Omega} + \varepsilon^3 \left\| \eta \frac{\partial^3 \tilde{u}_2}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}^2} \Big|_{\Gamma_0} \right\|_{1,\Omega} &\leq c\varepsilon^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

□

Remarque 4 :

En effectuant un développement de Taylor sur \tilde{u}_2 et en négligeant les termes inférieurs à ε^2 , la loi de paroi d'ordre deux imposée à Γ_δ s'écrit

$$\tilde{u}_2|_{\Gamma_\delta} = (\varepsilon \overline{\chi}^0 - \delta) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_\delta} + \varepsilon^2 \overline{\chi}^1 \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} \Big|_{\Gamma_\delta}. \quad (25)$$

Alors si on dérive (25) par rapport à \mathbf{s} ,

$$\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_\delta} = (\varepsilon \bar{\chi}^0 - \delta) \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_\delta} + O(\varepsilon^2)$$

on peut réécrire (25) comme

$$\tilde{u}_2|_{\Gamma_\delta} = \varepsilon \left(\bar{\chi}^0 - \frac{\delta}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_\delta} + \varepsilon \frac{\bar{\chi}^1}{\left(\bar{\chi}^0 - \frac{\delta}{\varepsilon} \right)} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_\delta} \quad (26)$$

à l'ordre deux.

Cette loi de paroi ne porte que sur les dérivées premières, ce qui facilite son implementation numérique. Les deux lois sont différentes, mais les solutions des problèmes globaux correspondants diffèrent par une erreur d'ordre inférieur à deux.

Remarque 5 :

Dans le cas d'une plaque plane lisse, les problèmes de cellules deviennent 1D et les solutions sont nulles. Alors, les lois de paroi d'ordre un et deux coïncident avec,

$$u + \delta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \Gamma_\delta.$$

De plus, dans le cas où les rugosités sont symétriques, χ^1 est antisymétrique et donc $\bar{\chi}^1 = 0$. Alors la loi de paroi d'ordre deux est en effet d'ordre un.

4 Application aux équations de Navier-Stokes incompressibles

Il s'agit de développer des conditions aux limites équivalentes pour les équations de Navier-Stokes incompressibles. La stratégie est similaire à celle mise en place pour le problème de Laplace, en utilisant le procédé récursif de la section 2.

Le but est de construire des approximations pour $(\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}), p^\varepsilon(\mathbf{x}))$ dans le domaine global Ω , solution du problème de Navier-Stokes avec la viscosité fixée à $\nu = \varepsilon \nu_0$ ($\nu_0 = Cte = O(1)$)

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) \cdot \mathbf{u}^\varepsilon - \varepsilon \nu_0 \Delta \mathbf{u}^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon &= \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^\varepsilon &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^\varepsilon &= \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_b, \\ \mathbf{u}^\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_\infty, \\ \mathbf{u}^\varepsilon &\text{périodique} \end{array} \right. \quad (27)$$

avec $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 'suffisamment régulière', dont le support n'intercepte pas Γ_0 .

On suppose l'existence d'une branche de solutions isolées pour (27), correspondant à un régime laminaire. Pour une étude approfondie de l'existence et de l'unicité de solutions pour les équations de Navier-Stokes, voir par exemple [23], [24] et [15].

Les fonctions $\mathbf{u} = (u^t, u^n)$ représentent la vitesse et p la pression statique. Le système d'équations (27) modélise les fluides incompressibles. Dans le cas des écoulements sur des domaines solides, la plupart des importants phénomènes physiques se concentrent dans une fine couche proche à la paroi, la couche limite. Donc, la prise en compte de cette région dans les simulations numériques est essentielle et constitue un sujet permanent de recherche en mécanique des fluides (voir Cousteix [13] et [12] par exemple). L'introduction de l'interface fictive Γ_0 est faite dans cette zone. Donc, si on souhaite que les lois de paroi représentent bien les solutions dans cette région, on doit tenir compte *a priori* des échelles caractéristiques particulières à la couche limite, en particulier $\frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{s} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ (voir [22]). Pour rester cohérent avec la physique du problème, on effectue le développement asymptotique par rapport à une échelle d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$, donc

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) &\approx \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \sqrt{\varepsilon} \tilde{\mathbf{v}}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ p^\varepsilon(\mathbf{x}) &\approx \tilde{p}(\mathbf{x}) + \sqrt{\varepsilon} \tilde{q}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \tilde{q}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \forall \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (28)$$

En introduisant (28) dans (27) et en identifiant les termes du même ordre, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (-\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{v}}_0 + \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{q}_0) + ((\nabla \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \varepsilon \nu_0 \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{p} - \mathbf{f}) \\ &+ (-\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{v}}_1 + \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{q}_1) + \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{v}}_0) \tilde{\mathbf{u}} + \sqrt{\varepsilon} \tilde{\mathbf{v}}_0 \nabla \tilde{\mathbf{u}} + (\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{v}}_0) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_0 \right) \\ &- 2\sqrt{\varepsilon} \nu_0 \Delta_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{v}}_0 + \sqrt{\varepsilon} (\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{v}}_1) \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \sqrt{\varepsilon} \nabla \tilde{q}_0 + O(\varepsilon) \dots = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \\ &\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_0 + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_1 + \sqrt{\varepsilon} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_0 + O(\varepsilon) \dots = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ &\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \sqrt{\varepsilon} \tilde{\mathbf{v}}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_b. \end{aligned} \right. \quad (29)$$

Encore une fois, on doit tenir compte de l'ordre des termes de (29) dans la couche limite, associé à la solution globale $(\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), \tilde{p}(\mathbf{x}))$ et à ses dérivés. À l'intérieur de la couche limite (voir [12])

$$\frac{\partial \tilde{u}^t}{\partial \mathbf{n}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}^t}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{s}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}^t}{\partial \mathbf{n}^2} = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

On est prêt à commencer la construction des ansatz itérativement. A l'ordre zéro, aucun correcteur n'est introduit, et l'approximation s'écrit simplement comme

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) &\approx \tilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega, \\ p^\varepsilon(\mathbf{x}) &\approx \tilde{p}_0(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega, \end{aligned} \quad (30)$$

où $(\tilde{\mathbf{u}}_0, \tilde{p}_0)$ est la solution du problème de Navier-Stokes

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\nabla \tilde{\mathbf{u}}_0) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_0 - \varepsilon \nu_0 \Delta \tilde{\mathbf{u}}_0 + \nabla \tilde{p}_0 = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega_0, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_0 = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ \tilde{\mathbf{u}}_0 = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \tilde{\mathbf{u}}_0 = 0 & \text{sur } \Gamma_\infty, \\ \tilde{\mathbf{u}}_0 & \text{périodique.} \end{array} \right. \quad (31)$$

Remarque 6 :

On s'intéresse aux cas où les rugosités sont contenues dans la couche limite visqueuse ($\approx \sqrt{\nu}$). Pour fixer les idées, on a choisi $\nu = \varepsilon \nu_0$ et on verra que par la suite, le choix sera commode. Évidemment, d'autres régimes sont possibles, ce qui nous amènerait à utiliser d'autres développements asymptotiques. De toute façon, la démarche de faire tendre ε vers zéro est en quelque sorte artificielle pour le cas réel, puisque la viscosité et la géométrie sont fixées d'avance. Donc, il n'y a pas une réelle nécessité d'avoir les paramètres ν et ε variant de façon indépendante. Il suffit de choisir une dépendance représentant raisonnablement le cas réel.

Remarque 7 :

Le choix du développement asymptotique à l'échelle $\sqrt{\varepsilon}$, s'explique en remarquant que l'erreur commise par l'approximation à l'ordre zéro de \mathbf{u}^ε sur le bord Γ_b est

$$\mathbf{u}^\varepsilon|_{\Gamma_b} = \tilde{\mathbf{u}}_0|_{\Gamma_0} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} = O(\sqrt{\varepsilon}),$$

et donc le premier correcteur doit effectivement introduire une correction d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$.

Si on choisit d'interrompre le procédé itératif à ce stade, l'approximation de la solution exacte du problème (29) est faite par $(\tilde{\mathbf{u}}_0, \tilde{p}_0)$ solution du problème (31), en introduisant une erreur d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$ à l'intérieur du domaine local et sur le respect de la condition aux limites $\mathbf{u} = 0$ à la paroi. Cependant, cette approximation s'avère insuffisante pour des problèmes comprenant de rugosités plus importantes ou pour des écoulements à fort nombre de Reynolds. Donc, dans les prochaines sections, il s'agira de développer des approximations d'ordres plus élevés, en particulier à l'ordre un et deux.

4.1 Loi de paroi d'ordre 1

L'idée est d'avancer dans le développement asymptotique en introduisant un nouveau correcteur pour mieux approcher $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ dans Ω . La première étape est

d'introduire un pseudo-correcteur y_1 -périodique $(\mathbf{v}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}), q_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ et de définir les fonctions $(\mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}))$ dans Ω par

$$(\mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})) = (\tilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) + \sqrt{\varepsilon} \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tilde{p}_0(\mathbf{x}) + \sqrt{\varepsilon} q_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})). \quad (32)$$

On construit (\mathbf{v}_0, q_0) de façon à ce que (\mathbf{u}, p) satisfasse (29) à l'ordre $\sqrt{\varepsilon}$ et que la condition aux limites exactes sur Γ_b soit aussi respectée à l'ordre $\sqrt{\varepsilon}$. Par l'expansion (29), les fonctions (\mathbf{v}_0, q_0) doivent donc satisfaire

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \mathbf{v}_0 + \nabla_{\mathbf{y}} q_0 &= 0 & \text{dans } \Omega_{loc}^\varepsilon, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{v}_0 &= 0 & \text{dans } \Omega_{loc}^\varepsilon, \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \mathbf{v}_0 &= \mathbf{C}_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} = Cte & \end{array} \right. \quad (33)$$

et à la paroi la condition aux limites

$$\tilde{\mathbf{u}}_0 + \sqrt{\varepsilon} \mathbf{v}_0 = 0 \text{ sur } \Gamma_b. \quad (34)$$

On remarque d'abord que, par un développement de Taylor de $\tilde{\mathbf{u}}_0$ à la paroi Γ_b , la condition aux limites (34) peut être réécrite comme

$$\sqrt{\varepsilon} \mathbf{v}_0|_{\Gamma_b} = -\tilde{\mathbf{u}}_0|_{\Gamma_0} + \frac{x_2}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0}$$

alors

$$\mathbf{v}_0(x_1, \mathbf{y}) = y_2 \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0}, \text{ sur } \Gamma_w^\varepsilon. \quad (35)$$

Les pseudo-correcteurs (\mathbf{v}_0, q_0) sont solution du problème de Stokes (33), avec les conditions aux limites sur \mathbf{v}_0 à la paroi donnée par (35). Alors, par linéarité, on écrit \mathbf{v}_0 dans Ω_{loc}^ε comme

$$\mathbf{v}_0(x_1, \mathbf{y}) = \chi^0(\mathbf{y}) \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0},$$

et sa pression associée q_0 par

$$q_0(x_1, \mathbf{y}) = \rho^0(\mathbf{y}) \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_0}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0},$$

où les fonctions $(\chi^0(\mathbf{y}), \rho^0(\mathbf{y}))$ ont des valeurs dans $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ et \mathbb{R}^2 et sont solutions du problème de Stokes bien posé (voir annexe)

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \chi^0 + \nabla_{\mathbf{y}} \rho^0 &= \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \chi^0 &= \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \chi^0 &= \bar{\chi}^0 = cte & \\ (\chi^0, \rho^0) &= \begin{array}{l} y_2 \mathbf{I} \\ y_1 - \text{périodique.} \end{array} & \text{sur } \Gamma_w, \end{array} \right. \quad (36)$$

Les fonctions (χ^0, ρ^0) sont écrites en forme matricielle, notées par

$$\chi_0 = \{\chi_t^0, \chi_n^0\} = \begin{bmatrix} \chi_{tt}^0 & \chi_{nt}^0 \\ \chi_{tn}^0 & \chi_{nn}^0 \end{bmatrix}, \quad \rho^0 = \{\rho_t^0, \rho_n^0\}.$$

On est prêt à construire le nouvel ansatz (\mathbf{u}_1, q_1) . En suivant l'algorithme de la section 2, la nouvelle approximation pour la vitesse s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \tilde{\mathbf{u}}_1 + \sqrt{\varepsilon} (\chi^0 - \bar{\chi}^0) \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \\ &= \tilde{\mathbf{u}}_1 + \sqrt{\varepsilon} \tilde{\mathbf{v}}_0 \text{ dans } \Omega \end{aligned} \quad (37)$$

et sa pression associée

$$\begin{aligned} q_1 &= \tilde{p}_1 + \sqrt{\varepsilon} \rho^0 \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \\ &= \tilde{p}_1 + \sqrt{\varepsilon} \tilde{q}_0 \text{ dans } \Omega. \end{aligned} \quad (38)$$

Les fonctions $(\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{p}_1)$ sont les approximations d'ordre un de la solution exacte $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ dans Ω_0 , solution du problème de Navier-Stokes

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\nabla \tilde{\mathbf{u}}_1) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_1 - \varepsilon \nu_0 \Delta \tilde{\mathbf{u}}_1 + \nabla \tilde{p}_1 &= \mathbf{f} & \text{dans } \Omega_0, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_1 &= \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_0, \\ \tilde{\mathbf{u}}_1 &= \varepsilon \bar{\chi}^0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial \mathbf{n}} & \text{sur } \Gamma_0, \\ \tilde{\mathbf{u}}_1 &= 0 & \text{sur } \Gamma_\infty, \\ \tilde{\mathbf{u}}_1 &\text{périodique.} & \end{array} \right. \quad (39)$$

Remarque 8 :

L'introduction du correcteur apporte une correction locale sur l'approximation de $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$. Le correcteur d'ordre un introduit à la fois une correction d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$ dans Ω_{loc}^ε et une correction d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$ sur le respect des conditions aux limites exactes sur Γ_b .

Remarque 9 :

Le problème de Navier-Stokes (39) peut être réécrit comme

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\nabla \tilde{\mathbf{u}}_1) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_1 - \varepsilon \nu_0 \Delta \tilde{\mathbf{u}}_1 + \nabla \tilde{p}_1 &= \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega_0, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_1 &= \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_0, \\ \tilde{u}_1^t &= \varepsilon \bar{\chi}_{tt}^0 \frac{\partial \tilde{u}_1^t}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ \tilde{u}_1^n &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ \tilde{\mathbf{u}}_1 &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_\infty, \\ \tilde{\mathbf{u}}_1 &\text{périodique.} \end{array} \right. \quad (40)$$

En effet, par la contrainte d'incompressibilité dans (36) et la y_1 -périodicité de χ_t^0

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_{loc}} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \chi_t^0 d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Gamma_w} \chi_t^0 \cdot \mathbf{n} ds + \bar{\chi}_{tn}^0 |\Gamma_{\text{sup}}| \\ &= \int_{\Gamma_w} \begin{bmatrix} y_2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{n} ds + \bar{\chi}_{tn}^0 |\Gamma_{\text{sup}}| \\ &= \int_{\Omega_{loc}} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \begin{bmatrix} y_2 \\ 0 \end{bmatrix} d\mathbf{x} + \bar{\chi}_{tn}^0 |\Gamma_{\text{sup}}| \\ &= \bar{\chi}_{tn}^0 |\Gamma_{\text{sup}}| \Rightarrow \bar{\chi}_{tn}^0 = 0 \end{aligned}$$

Donc, par la contrainte d'incompressibilité dans (39) et l'expression de la loi de paroi d'ordre un

$$\frac{\partial \tilde{u}_1^n}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} = \frac{\partial \tilde{u}_1^t}{\partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} = O(\varepsilon)$$

alors

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_1 &= \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^t \\ \tilde{u}_1^n \end{bmatrix} = \sqrt{\varepsilon} \begin{bmatrix} \bar{\chi}_{tt}^0 & \bar{\chi}_{nt}^0 \\ \bar{\chi}_{tn}^0 & \bar{\chi}_{nn}^0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_1^t}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \\ \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_1^n}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{\varepsilon} \begin{bmatrix} \bar{\chi}_{tt}^0 \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_1^t}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

en négligeant les termes d'ordre inférieurs à ε .

Remarque 10 :

D'après (40), il est inutile de calculer le vecteur χ_n^0 car il n'intervient pas à l'ordre 1.

Remarque 11 :

Le problème (40) peut être mal posé si $\bar{\chi}_{tt}^0$ est positif, puisque la formulation variationnelle contient le terme

$$-\frac{\nu_0}{\bar{\chi}_{tt}^0} \int_{\Gamma_0} u^t v^t.$$

Alors, pour cette raison, on effectue un développement de Taylor, et on remplace la condition aux limites (40) par

$$\begin{cases} \tilde{u}_1^t = \sqrt{\varepsilon} \left(\bar{\chi}_{tt}^0 - \frac{\delta}{\varepsilon} \right) \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_1^t}{\partial \mathbf{n}} & \text{sur } \Gamma_\delta, \\ \tilde{u}_1^n = 0 & \text{sur } \Gamma_\delta. \end{cases} \quad (41)$$

Comme $\bar{\chi}_{tt}^0$ est bornée (voir annexe), pour δ suffisamment grand le problème de Navier-Stokes avec les conditions aux limites (41) sera bien posé. Ce problème sera résolu dans la section 5.

4.2 Loi de paroi d'ordre 2

Dans de nombreuses applications, l'influence des termes de convection et de gradient de pression sont importants, en raison de la géométrie du domaine ou en raison d'un nombre de Reynolds élevé. Comme ont remarqué Mohammadi-Pironneau [18] dans le cadre des écoulements turbulents, les lois de paroi doivent prendre en compte ces nouveaux termes. Il faut donc introduire dans la loi de paroi, des termes de correction sur la pression et sur la convection. On s'intéresse donc à poursuivre le développement asymptotique à l'ordre deux, avec l'objectif de développer des lois de paroi contenant ces nouveaux termes.

On commence l'approximation à l'ordre deux en introduisant un nouveau pseudo-correcteur $(\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), q_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ défini dans Ω_{loc}^ε , tel que

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})) &= (\tilde{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x}) + \sqrt{\varepsilon} \tilde{\mathbf{v}}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tilde{p}_1(\mathbf{x}) + \\ &\quad \sqrt{\varepsilon} \tilde{p}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon p_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \quad (42)$$

satisfasse l'équation (29) et la condition aux limites exactes sur Γ_b à l'ordre ε .

Alors, le pseudo-correcteur (\mathbf{v}_1, p_1) est solution du problème de Stokes

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \mathbf{v}_1 + \nabla_{\mathbf{y}} q_1 &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{v}}_0) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_1 - (\nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{u}}_1) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_0 - (\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{v}}_0) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_0 \quad \text{dans } \Omega_{loc}^\varepsilon, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_{loc}^\varepsilon, \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{C}_1 = Cte, \\ \mathbf{v}_1 & \quad y_1 - \text{périodique} \end{array} \right. \quad (43)$$

satisfaisant la condition aux limites à la paroi Γ_b

$$\tilde{\mathbf{u}}_1 + \sqrt{\varepsilon} \tilde{\mathbf{v}}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 = 0. \quad (44)$$

Les second membres du problème (43) sont les termes convectifs venant de l'approximation à l'ordre un. En utilisant l'expression (37) et en prolongeant la solution globale $\tilde{\mathbf{u}}_1$ et ses dérivés dans le domaine local Ω_{loc}^ε par un développement de Taylor, on réécrit chaque terme de droite de (43) par :

a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{v}}_0) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_1 &\approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \nabla_{\mathbf{y}} \left(\chi_0 \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_0} \right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{u}}_1|_{\Gamma_0} - y_2 \sqrt{\varepsilon} \mathbf{I} \cdot \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_0} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \nabla_{\mathbf{y}} \left(\chi_0 \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_0} \right) \cdot \left(\sqrt{\varepsilon} (\bar{\chi}_0 - y_2 \mathbf{I}) \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_0} \right) \\ &= \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_1^t}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_0} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \chi_{tt}^0}{\partial \mathbf{s}} & \frac{\partial \chi_{tt}^0}{\partial \mathbf{n}} \\ \frac{\partial \chi_{nt}^0}{\partial \mathbf{s}} & \frac{\partial \chi_{nt}^0}{\partial \mathbf{n}} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{cc} \bar{\chi}_{tt}^0 - y_2 & \bar{\chi}_{nt}^0 \\ 0 & \bar{\chi}_{nn}^0 - y_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_1^t}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_0} \\ 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \chi_{tt}^0}{\partial \mathbf{s}} \cdot (\bar{\chi}_{tt}^0 - y_2) \\ \frac{\partial \chi_{nt}^0}{\partial \mathbf{s}} \cdot (\bar{\chi}_{tt}^0 - y_2) \end{array} \right] \left(\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_1^t}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_0} \right)^2, \end{aligned} \quad (45)$$

b)

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{u}}_1) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_0 &\approx (\nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{u}}_1|_{\Gamma_0}) \cdot (\chi_0 - \bar{\chi}_0) \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_1^t}{\partial x_1}|_{\Gamma_0} & \frac{\partial \tilde{u}_1^t}{\partial x_2}|_{\Gamma_0} \\ \frac{\partial \tilde{u}_1^n}{\partial x_1}|_{\Gamma_0} & \frac{\partial \tilde{u}_1^n}{\partial x_2}|_{\Gamma_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi_{tt}^0 - \bar{\chi}_{tt}^0 & \chi_{nt}^0 - \bar{\chi}_{nt}^0 \\ \chi_{tn}^0 & \chi_{nn}^0 - \bar{\chi}_{nn}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_1^t}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\chi_{tn}^0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_1^t}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \right)^2
\end{aligned} \tag{46}$$

et le dernier terme

c)

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{v}}_0) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_0 &= \nabla_{\mathbf{y}} \left(\chi_0 \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \right) \cdot (\chi_0 - \bar{\chi}_0) \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \\
&= \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_1^t}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_{tt}^0}{\partial y_1} & \frac{\partial \chi_{tt}^0}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \chi_{nt}^0}{\partial y_1} & \frac{\partial \chi_{nt}^0}{\partial y_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi_{tt}^0 - \bar{\chi}_{tt}^0 & \chi_{nt}^0 - \bar{\chi}_{nt}^0 \\ \chi_{tn}^0 & \chi_{nn}^0 - \bar{\chi}_{nn}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_1^t}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_{tt}^0}{\partial y_1} (\chi_{tt}^0 - \bar{\chi}_{tt}^0) + \frac{\partial \chi_{tt}^0}{\partial y_2} \chi_{tn}^0 \\ \frac{\partial \chi_{nt}^0}{\partial y_1} (\chi_{tt}^0 - \bar{\chi}_{tt}^0) + \frac{\partial \chi_{nt}^0}{\partial y_2} \chi_{tn}^0 \end{bmatrix} \left(\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_1^t}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \right)^2.
\end{aligned} \tag{47}$$

Donc, le correcteur (\mathbf{v}_1, p_1) doit être solution d'un problème de Stokes dans Ω_{loc}^ε avec le terme de source donné par :

$$- \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_{tt}^0}{\partial y_1} (\chi_{tt}^0 - \bar{\chi}_{tt}^0) + \chi_{tn}^0 \left(\frac{\partial \chi_{tt}^0}{\partial y_2} - 1 \right) \\ \frac{\partial \chi_{nt}^0}{\partial y_1} (\bar{\chi}_{tt}^0 - \chi_{tt}^0) + \chi_{tn}^0 \frac{\partial \chi_{nt}^0}{\partial y_2} \end{bmatrix} \left(\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_1^t}{\partial \mathbf{n}} \right)^2|_{\Gamma_0}. \tag{48}$$

D'autre part, le prolongement à Γ_b de la solution globale $\tilde{\mathbf{u}}_1$, a introduit une erreur sur le respect de la condition aux limites exacte. L'approximation à l'ordre un a réduit cette erreur à l'ordre $\sqrt{\varepsilon}$ et le nouveau pseudo-correcteur \mathbf{v}_1 doit le corriger à l'ordre ε . Donc, à partir de la condition aux limites (44) et de l'expression de la loi de paroi d'ordre un dans (39)

$$\begin{aligned}
\varepsilon \mathbf{v}_1|_{\Gamma_b} &= -\tilde{\mathbf{u}}_1|_{\Gamma_0} + y_2 \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} - \sqrt{\varepsilon} \tilde{\mathbf{v}}_0|_{\Gamma_b} \\
&= -\varepsilon \bar{\chi}^0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} + y_2 \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \\
&\quad - \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} (\chi^0|_{\Gamma_w} - \bar{\chi}^0) \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} - \frac{(y_2)^2}{2} \varepsilon \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial \mathbf{n}^2}|_{\Gamma_0} \\
&= -\frac{(y_2)^2}{2} \varepsilon \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial \mathbf{n}^2}|_{\Gamma_0}.
\end{aligned} \tag{49}$$

alors

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{(y_2)^2}{2} \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial \mathbf{n}^2}|_{\Gamma_0} \text{ sur } \Gamma_w^\varepsilon. \tag{50}$$

En résumé, le nouveau pseudo-correcteur (\mathbf{v}_1, q_1) est défini comme étant solution du problème de Stokes (43) avec la condition aux limites à la paroi (50). Alors par linéarité, on écrit le pseudo-correcteur pour la vitesse comme

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{y}, x_1) = \chi^1(\mathbf{y}) \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial \mathbf{n}^2}|_{\Gamma_0} + \chi^2(\mathbf{y}) \left(\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_1^t}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \right)^2 \text{ dans } \Omega_{loc}^\varepsilon,$$

et celui pour la pression par

$$q_1(\mathbf{y}, x_1) = \rho^1(\mathbf{y}) \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial \mathbf{n}^2}|_{\Gamma_0} + \rho^2(\mathbf{y}) \left(\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_1^t}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \right)^2 \text{ dans } \Omega_{loc}^\varepsilon$$

où χ_1 (resp. ρ_1) est une fonction matricielle (resp. vectorielle) et χ_2 (resp. ρ_2) est une fonction vectorielle (resp. scalaire), satisfaisant respectivement les problèmes de Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \chi^1 + \nabla_{\mathbf{y}} \rho^1 &= \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \chi^1 &= \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \chi^1 &= \bar{\chi}^1 = Cte, & \\ \chi^1 &= -\frac{(y_2)^2}{2} \mathbf{I} & \text{sur } \Gamma_w, \\ (\chi^1, \rho^1) && y_1 - \text{périodique} \end{array} \right. \tag{51}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \chi^2 + \nabla_{\mathbf{y}} \rho^2 &= - \left[\begin{array}{l} \frac{\partial \chi_{tt}^0}{\partial y_1} (\chi_{tt}^0 - y_2) + \chi_{tn}^0 \left(\frac{\partial \chi_{tt}^0}{\partial y_2} - 1 \right) \\ \frac{\partial \chi_{nt}^0}{\partial y_1} (\bar{\chi}_{tt}^0 - y_2) + \chi_{tn}^0 \frac{\partial \chi_{nt}^0}{\partial y_2} \end{array} \right] & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \chi^2 &= \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_{loc}, \\ \lim_{y_2 \rightarrow \infty} \chi^2 &= \bar{\chi}^2 = Cte \\ \chi^2 &= \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_w, \\ (\chi^2, \rho^2) & \quad y_1 - \text{périodique.} \end{array} \right. \quad (52)$$

Une fois les pseudo-correcteurs définis, on est prêt à construire le nouvel ansatz $(\mathbf{u}_2(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}))$ d'ordre deux. Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2(\mathbf{x}) &= \tilde{\mathbf{u}}_2 + \sqrt{\varepsilon} (\chi_0 - \bar{\chi}_0) \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_2}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} + \varepsilon (\chi^1 - \bar{\chi}^1) \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_2}{\partial \mathbf{n}^2}|_{\Gamma_0} + \\ & \quad \varepsilon (\chi^2 - \bar{\chi}^2) \left(\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_2^t}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \right)^2 \\ &= \tilde{\mathbf{u}}_2(\mathbf{x}) + \sqrt{\varepsilon} \tilde{\mathbf{v}}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}_1(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (53)$$

et sa pression associée

$$\begin{aligned} p_2(\mathbf{x}) &= \tilde{p}_2(\mathbf{x}) + \sqrt{\varepsilon} \rho^0 \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_2}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} + \varepsilon \rho^1 \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_2}{\partial \mathbf{n}^2}|_{\Gamma_0} + \\ & \quad \sqrt{\varepsilon} \rho_2 \left(\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_2^t}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \right)^2 \\ &= \tilde{p}_2(\mathbf{x}) + \sqrt{\varepsilon} \tilde{q}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \tilde{q}_1(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (54)$$

Les fonctions $(\tilde{\mathbf{u}}_2, \tilde{p}_2)$ sont les approximations d'ordre deux de la solution exacte $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ dans Ω_0 , solution du problème de Navier-Stokes

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\nabla \tilde{\mathbf{u}}_2) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_2 - \varepsilon \nu_0 \Delta \tilde{\mathbf{u}}_2 + \nabla \tilde{p}_2 &= \mathbf{f} & \text{dans } \Omega_0, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_2 &= \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_0, \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 &= \varepsilon \bar{\chi}^0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_2}{\partial \mathbf{n}} + \varepsilon^2 \bar{\chi}^1 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_2}{\partial \mathbf{n}^2} + \varepsilon^2 \bar{\chi}^2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_2^t}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 &= 0 & \text{sur } \Gamma_\infty, \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 &\text{périodique.} & \end{array} \right. \quad (55)$$

Remarque 12 :

De façon analogue à l'approximation à l'ordre un, on peut réécrire la condition aux limites à la paroi dans (55). En effet, par l'équation de la continuité dans (55) et l'expression de la loi de paroi d'ordre un

$$O(\varepsilon) = \frac{\partial \tilde{u}_2^t}{\partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} = \left(\frac{\partial \tilde{u}_2^t}{\partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} - \frac{\partial \tilde{u}_2^n}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} + \frac{\partial \tilde{u}_2^n}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \right) = \frac{\partial \tilde{u}_2^n}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0}.$$

En utilisant les conditions d'incompressibilité de (51) et (52) et la y_1 -périodicité des fonctions χ^1 et χ^2 on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_{loc}} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \chi_t^1 d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Gamma_w} \chi_t^1 \cdot \mathbf{n} ds + \bar{\chi}_{tn}^1 |\Gamma_{\text{sup}}| \\ &= \int_{\Gamma_w} \left[-\frac{(y_2)^2}{2} \right] \cdot \mathbf{n} ds + \bar{\chi}_{tn}^1 |\Gamma_{\text{sup}}| \\ &= \int_{\Omega_{loc}} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left[-\frac{(y_2)^2}{2} \right] d\mathbf{x} + \bar{\chi}_{tn}^1 |\Gamma_{\text{sup}}| \\ &= \bar{\chi}_{tn}^1 |\Gamma_{\text{sup}}| \Rightarrow \bar{\chi}_{tn}^1 = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega_{loc}} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \chi^2 d\mathbf{x} \\
&= \int_{\Gamma_w} \chi^2 \cdot \mathbf{n} ds + \overline{\chi}_n^2 |\Gamma_{sup}| \\
&= \overline{\chi}_n^2 |\Gamma_{sup}| \Rightarrow \overline{\chi}_n^2 = 0.
\end{aligned}$$

Alors en négligeant les termes d'ordre inférieur à $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{u}}_2|_{\Gamma_0} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_2^t \\ \tilde{u}_2^n \end{bmatrix} &= \sqrt{\varepsilon} \begin{bmatrix} \overline{\chi}_{tt}^0 & \overline{\chi}_{nt}^0 \\ \overline{\chi}_{tn}^0 & \overline{\chi}_{nn}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_2^t}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \\ \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_2^n}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \end{bmatrix} \\
&+ \varepsilon \begin{bmatrix} \overline{\chi}_{tt}^1 & \overline{\chi}_{nt}^1 \\ \overline{\chi}_{tn}^1 & \overline{\chi}_{nn}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{u}_2^t}{\partial \mathbf{n}^2}|_{\Gamma_0} \\ \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{u}_2^n}{\partial \mathbf{n}^2}|_{\Gamma_0} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \overline{\chi}_t^2 \\ \overline{\chi}_n^2 \end{bmatrix} \left(\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_2^t}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \right)^2 \\
&= \sqrt{\varepsilon} \begin{bmatrix} \overline{\chi}_{tt}^0 \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_2^t}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \overline{\chi}_{tt}^1 \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{u}_2^t}{\partial \mathbf{n}^2}|_{\Gamma_0} \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \overline{\chi}_t^2 \varepsilon \left(\frac{\partial \tilde{u}_2^t}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \right)^2 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{56}$$

Le problème de Navier-Stokes au deuxième ordre devient

$$\left\{ \begin{array}{ll}
(\nabla \tilde{\mathbf{u}}_2) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_2 - \varepsilon \nu_0 \Delta \tilde{\mathbf{u}}_2 + \nabla \tilde{p}_2 &= \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega_0, \\
\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_2 &= 0 \quad \text{dans } \Omega_0, \\
\tilde{u}_2^t &= \varepsilon \overline{\chi}_{tt}^0 \frac{\partial \tilde{u}_2^t}{\partial \mathbf{n}} + \varepsilon^2 \overline{\chi}_{tt}^1 \frac{\partial^2 \tilde{u}_2^t}{\partial \mathbf{n}^2} + \varepsilon^2 \overline{\chi}_t^2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_2^t}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\
\tilde{u}_2^n &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\
\tilde{\mathbf{u}}_2 &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_\infty, \\
\tilde{\mathbf{u}}_2 &\text{périodique.}
\end{array} \right. \tag{57}$$

Remarque 13 :

La loi de paroi d'ordre deux imposée sur Γ_0 dans (57) prend en compte l'influence des termes de convection (non-linéaire) et de gradient de pression. En effet, l'expression de la loi de paroi d'ordre deux implique

$$\frac{1}{(\bar{\chi}_{tt}^0)^2} (\tilde{u}_2^t|_{\Gamma_0})^2 = \varepsilon \left(\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_2^t}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_0} \right)^2 + O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right)$$

et par l'équation de Navier-Stokes originale

$$\varepsilon \nu_0 \frac{\partial^2 \tilde{u}_2^t}{\partial \mathbf{n}^2}|_{\Gamma_0} = \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial \mathbf{s}}|_{\Gamma_0} + O(\varepsilon).$$

Donc, la solution globale à l'ordre deux $(\tilde{\mathbf{u}}_2, \tilde{p}_2)$ satisfait le problème de Navier-Stokes

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\nabla \tilde{\mathbf{u}}_2) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_2 - \varepsilon \nu_0 \Delta \tilde{\mathbf{u}}_2 + \nabla \tilde{p}_2 &= \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega_0, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_2 &= 0 \quad \text{dans } \Omega_0, \\ \tilde{u}_2^t &= \sqrt{\varepsilon} \bar{\chi}_{tt}^0 \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_2^t}{\partial \mathbf{n}} + \varepsilon \frac{\bar{\chi}_{tt}^1}{\nu_0} \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\bar{\chi}_t^2}{(\bar{\chi}_{tt}^0)^2} (\tilde{u}_2^t)^2 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ \tilde{u}_2^n &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_\infty, \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 &\text{périodique.} \end{array} \right. \quad (58)$$

Remarque 14 :

Comme pour l'approximation à l'ordre un, le changement de la hauteur de l'interface modifie les constantes d'homogénéisation, ce qui permet de bien poser le problème aux conditions aux limites (58). En effet, par un développement de Taylor et en négligeant les termes d'ordre inférieurs à $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$, la loi de paroi d'ordre deux dans (58) est remplacée par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{u}_2^t &= \sqrt{\varepsilon} \left(\bar{\chi}_{tt}^0 - \frac{\delta}{\varepsilon} \right) \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{u}_2^t}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\varepsilon}{\nu_0} \left(\bar{\chi}_{tt}^1 + \frac{\delta}{\varepsilon} \bar{\chi}_{tt}^0 - \frac{\delta^2}{2\varepsilon^2} \right) \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial \mathbf{s}} \\ &+ \frac{\bar{\chi}_t^2}{\left(\bar{\chi}_{tt}^0 - \frac{\delta}{\varepsilon} \right)^2} (\tilde{u}_2^t)^2 \quad \text{sur } \Gamma_\delta, \\ \tilde{u}_2^n &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_\delta. \end{array} \right. \quad (59)$$

Dans le cas particulier d'une plaque plane lisse, les constantes d'homogénéisation sont données analytiquement par $\bar{\chi}_{tt}^0 = \bar{\chi}_{tt}^1 = \bar{\chi}_t^2 = 0$. Alors (59) est simplifiée et s'écrit

$$\begin{cases} \tilde{u}_2^t + \delta \frac{\partial \tilde{u}_2^t}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{\nu} \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial \mathbf{s}} = 0 & \text{sur } \Gamma_\delta, \\ \tilde{u}_2^n = 0 & \text{sur } \Gamma_\delta. \end{cases} \quad (60)$$

5 Validations numériques

Dans cette partie, on s'intéresse à la validation des lois de paroi pour les équations de Navier-Stokes construites dans les sections précédentes. On rappelle que pour le problème de Navier-Stokes

$$\begin{cases} (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} - \varepsilon \nu_0 \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega_0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega_0, \end{cases}$$

l'approximation à l'ordre zéro consiste à imposer

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0, \quad (61)$$

à l'ordre un

$$\begin{cases} \nu \frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\nu}{\varepsilon \left(\bar{\chi}_{tt}^0 - \frac{\delta}{\varepsilon} \right)} u^t & \text{sur } \Gamma_\delta, \\ u^n = 0 & \text{sur } \Gamma_\delta, \end{cases} \quad (62)$$

et à l'ordre deux

$$\begin{cases} \nu \frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\nu}{\varepsilon \left(\bar{\chi}_{tt}^0 - \frac{\delta}{\varepsilon} \right)} u^t + \frac{\left(-\bar{\chi}_{tt}^1 - \frac{\delta}{\varepsilon} \bar{\chi}_{tt}^0 + \frac{\delta^2}{2\varepsilon^2} \right)}{\left(\bar{\chi}_{tt}^0 - \frac{\delta}{\varepsilon} \right)} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{s}} \\ \quad - \nu \frac{\bar{\chi}_t^2}{\left(\bar{\chi}_{tt}^0 - \frac{\delta}{\varepsilon} \right)^3} (u^t)^2 & \text{sur } \Gamma_\delta, \\ u^n = 0 & \text{sur } \Gamma_\delta, \end{cases} \quad (63)$$

avec les constantes $\bar{\chi}_{tt}^0$, $\bar{\chi}_{tt}^1$ et $\bar{\chi}_t^2$ calculées à partir des problèmes de cellules (36), (51) et (52), respectivement.

Il s'agit d'étudier numériquement les améliorations apportées par l'augmentation de l'ordre d'approximation en fonction des différentes formes du domaine. Pour chaque problème abordé, cette comparaison est faite par

- i) les isolignes des solutions (\mathbf{u} et p),

- ii) des coupes des solutions et de $C_f = \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{s}$ à $x_2 = Cte$ au-dessus de la paroi.

La résolution des équations de Navier-Stokes dans Ω_0 , avec les conditions aux limites (62) où (63) sur Γ_δ , suit l'algorithme suivant :

1. on fixe le paramètre ε comme étant la hauteur caractéristique de la rugosité,
2. on construit le domaine local dilaté par un facteur $\frac{1}{\varepsilon}$, avec une interface supérieure Γ_{sup} 'suffisamment éloignée' de la paroi rugueuse. La viscosité du problème de Stokes local est fixée par ν_0 , avec une condition de Dirichlet à la paroi (dépendant de l'ordre de l'approximation), condition aux limites périodiques dans la direction tangentielle et condition de Neumann homogène pour la vitesse tangentielle et vitesse normale nulle à l'infini. La contrainte de périodicité est cruciale pour l'obtention de la décroissance asymptotique des solutions et doit être parfaitement vérifiée. On remarque finalement que la contrainte imposée à l'infini est cohérente avec la théorie, puisque les solutions des problèmes de cellule tendent vers des constantes exponentiellement vite (voir annexe),
3. une fois le problème de cellule résolu (trois pour l'approximation à l'ordre deux), la valeur des constantes est calculée comme étant la trace de la vitesse tangentielle sur Γ_{sup} . Finalement, on introduit la constante (trois constantes à l'ordre deux) dans les lois de paroi, et on choisit la hauteur de couplage δ .

Les validations sont faites à partir de cinq cas tests :

- i) une plaque plane lisse avec bord d'attaque, où on valide le cas dégénéré (les cellules sont 1D),
- ii) une plaque plane lisse suivie d'une plaque rugueuse, contenant des rugosités symétriques de petites dimensions,
- iii) un canal contenant une partie lisse suivie d'une partie rugueuse constituée par deux formes différentes de rugosités,
- iv) un diffuseur comprenant sur sa partie inférieure une plaque plane lisse, suivie d'une plaque rugueuse avec des rugosités sinusoidales et d'une nouvelle plaque plane lisse,
- v) une plaque plane suivie d'une plaque rugueuse contenant des rugosités non symétriques d'importantes dimensions.

Pour chaque problème, on effectue d'abord un calcul direct, consistant à résoudre les équations de Navier-Stokes, avec $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ imposé à la paroi rugueuse. Les maillages doivent être suffisamment raffinés, afin que la géométrie des rugosités soit bien approchée et les solutions soient assez précises pour servir de comparaison avec celles obtenues en utilisant les lois de paroi. Par la suite, on notera par λ la période de la rugosité et par A son amplitude.

5.1 Problème dégénéré: plaque plane

Dans les applications pratiques, on trouve souvent des alternances de parois lisses et rugueuses. On peut vouloir appliquer les lois de paroi sur ces types de domaines, en les utilisant à la fois sur les parois lisses et rugueuses. De plus, on profite de cette géométrie pour effectuer les premières validations et pour étudier l'utilisation de maillages plus grossiers.

Les caractéristiques du problème pour la plaque plane sont :

- $Re = 10^3$,
- domaine: $[-0.1, 10] \times [0, 1]$ avec bord attaque. Plaque plane commençant à $x_1 = 0$,
- condition de Dirichlet $\mathbf{u} = (1, 0)$ à l'entrée, Neumann homogène à la sortie, $\frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = 0$ et $u^n = 0$ à l'infini,
- et loi de paroi d'ordre un, d'ordre deux où Dirichlet homogène pour la vitesse à la paroi.

Les problèmes de cellules sont dégénérés et les constantes d'homogénéisation sont données par :

$$\bar{\chi}_{tt}^0 = \bar{\chi}_{tt}^1 = \bar{\chi}_t^2 = 0.$$

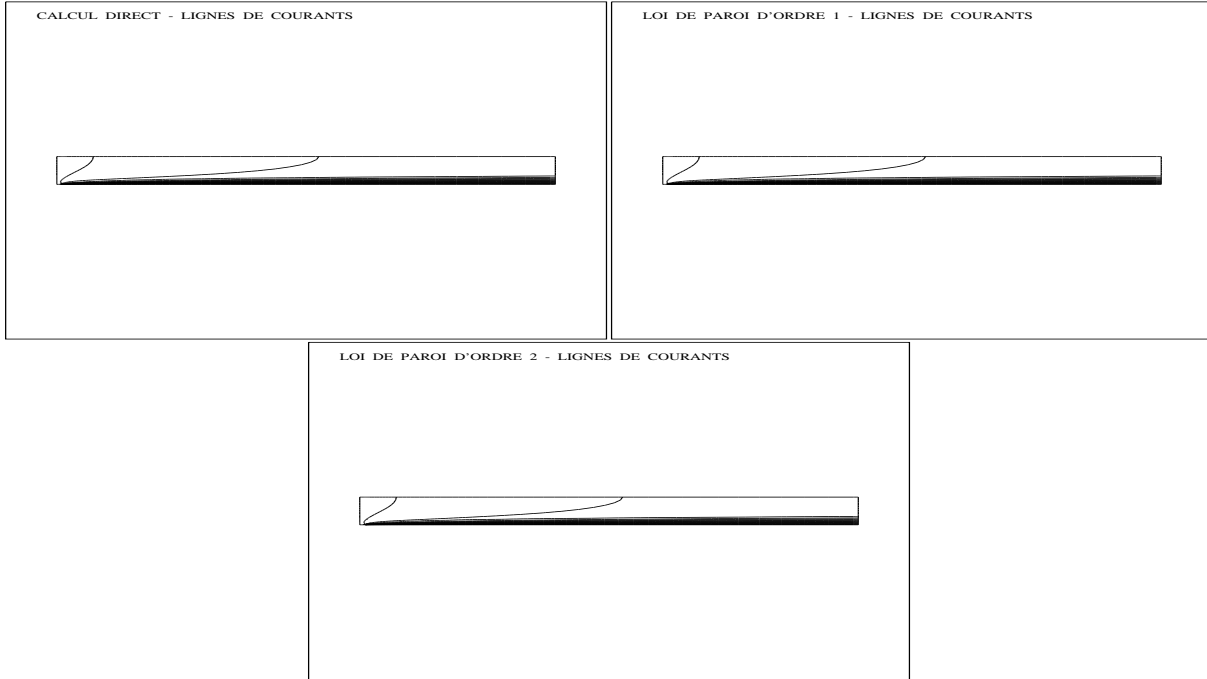


FIG. 2: Les lignes de courants retrouvées avec les lois de paroi d'ordre un et deux sont similaires à celles obtenues par un calcul direct ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$ à la paroi).

Donc, les lois de paroi d'ordre un et deux imposées à une hauteur δ de la paroi, s'écrivent respectivement

$$\begin{cases} \nu \frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\nu}{\delta} u^t & \text{sur } \Gamma_\delta, \\ u^n = 0 & \text{sur } \Gamma_\delta \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \nu \frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\nu}{\delta} u^t + \frac{\delta}{2} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{s}} & \text{sur } \Gamma_\delta, \\ u^n = 0 & \text{sur } \Gamma_\delta. \end{cases}$$

Les conditions aux limites équivalentes sont imposées à $\delta = 10^{-3}$. L'emploi des lois de paroi nous a permis d'utiliser des maillages deux fois plus grossiers par rapport aux maillages utilisés dans le calcul direct. Les profils de vitesse et de pression retrouvés avec les différentes lois de paroi, sont similaires à ceux obtenus par le calcul direct (figures 2 et 3).

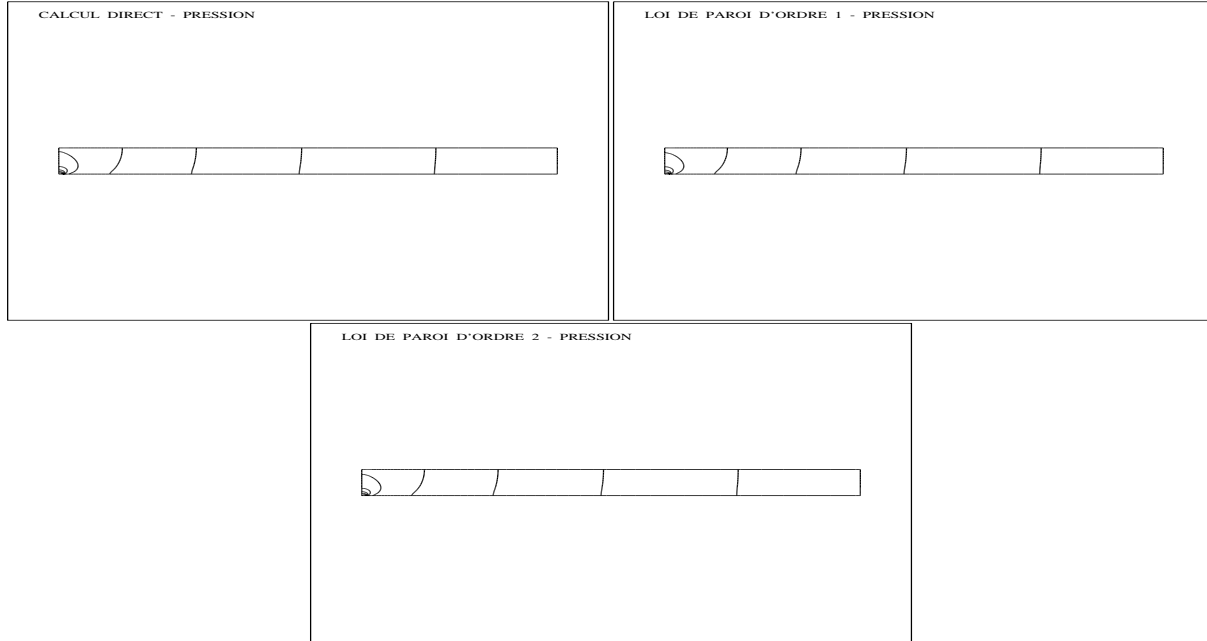


FIG. 3: Les iso-pressions retrouvées avec les lois de paroi d'ordre un et deux sont similaires à celles obtenues par un calcul direct ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$ à la paroi).

Le choix de la hauteur de couplage est important et doit être toujours fixé de façon à ce que l'interface fictive Γ_δ soit à l'intérieur de la couche limite. Dans ces cas (figures 4 et 5), les profils de u^t , C_f et de pression obtenus avec les lois de paroi coïncident avec ceux obtenus par le calcul direct. En contrepartie, en plaçant Γ_δ à la hauteur $\delta = 10^{-2}$, la région proche au bord d'attaque reste en dehors de la couche limite et l'approximation se dégrade (figure 5).

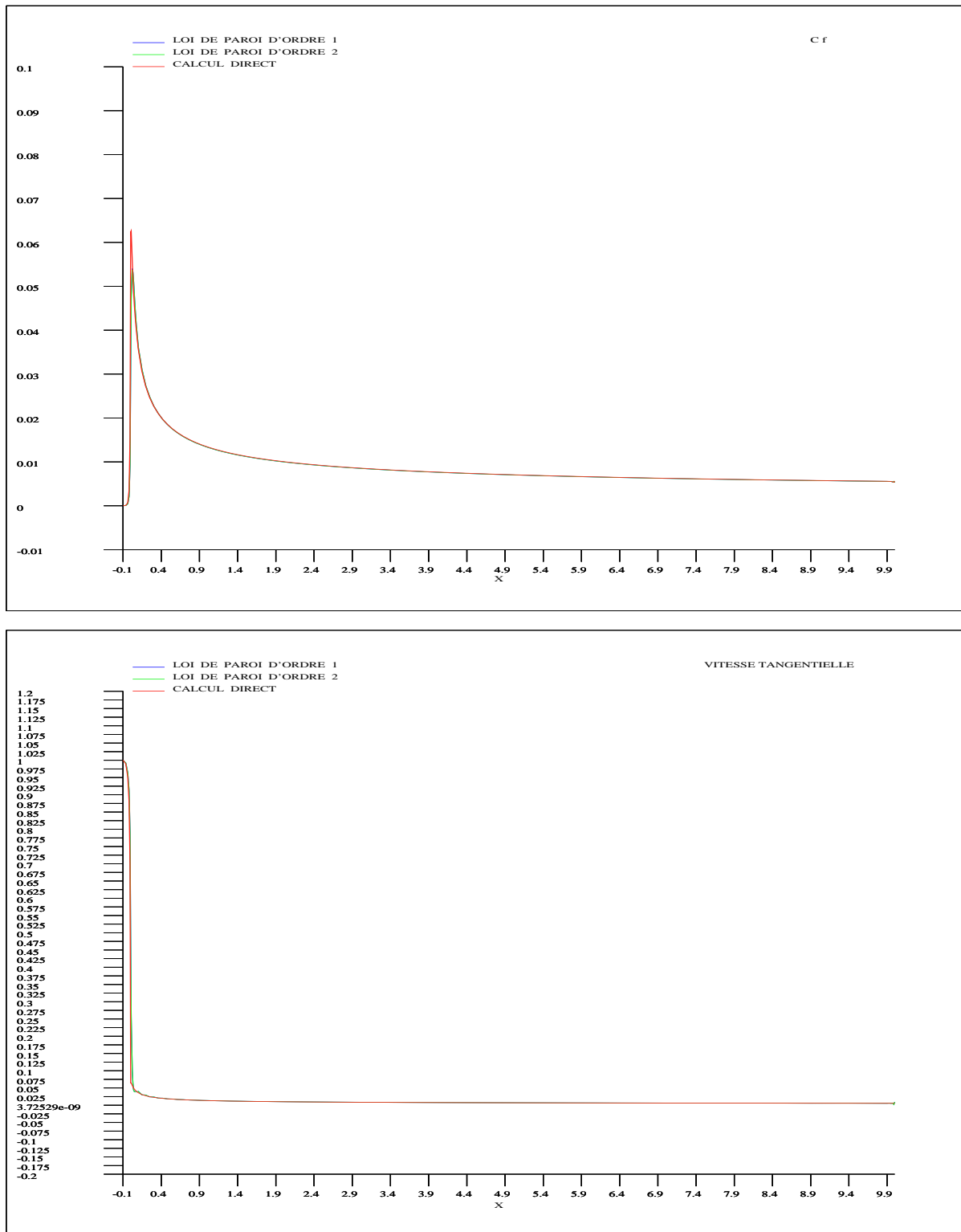


FIG. 4: Comparaison entre le C_f et la vitesse tangentielle à $\delta = 10^{-3}$ sur plaque plane. Les profils obtenus avec les lois de paroi coïncident avec ceux obtenus par un calcul direct. En raison du faible gradient de pression, l'ordre un et deux sont similaires.

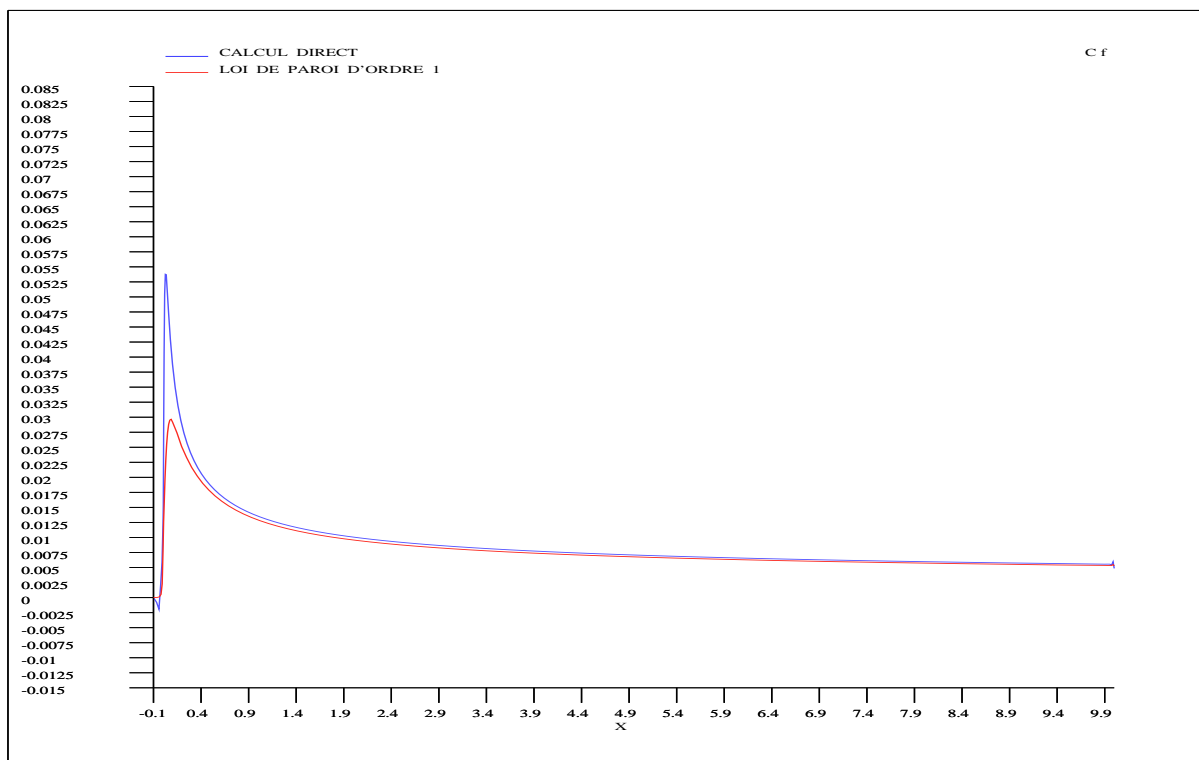
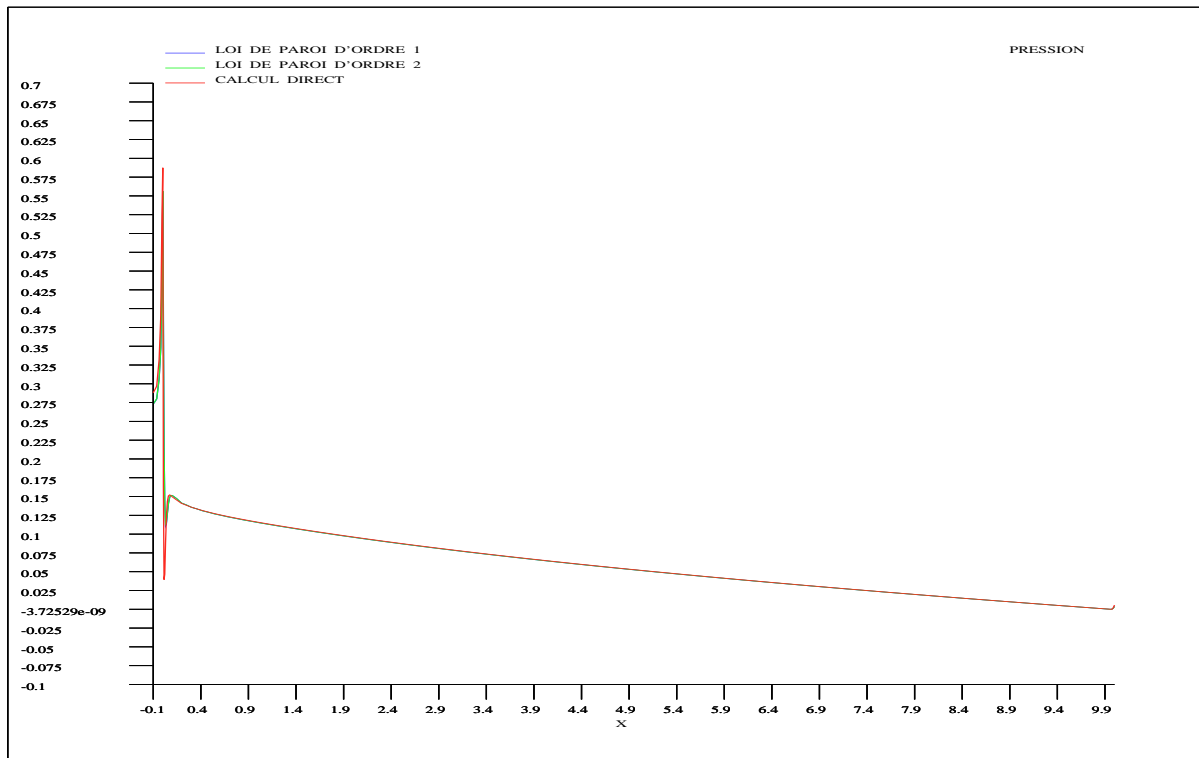


FIG. 5: Comparaison entre les profils de pression à $\delta = 10^{-3}$, obtenus par les différentes approches sur la plaque plane (en haut). En appliquant la loi de paroi à $\delta = 10^{-2}$ au-dessus de la plaque plane, l'approximation à l'ordre un se dégrade principalement près du bord d'attaque, où la loi de paroi est imposée en dehors de la couche limite (en bas).

5.2 Plaque avec rugosités symétriques

La paroi est constituée d'une plaque plane suivie par une plaque rugueuse avec des rugosités sinusoïdales. Les caractéristiques des problèmes en fonction des conditions aux limites sont :

- $Re = 10^3$,
- condition de Dirichlet $\mathbf{u} = (1, 0)$ à l'entrée, Neumann homogène à la sortie et $\frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = 0$ et $u^n = 0$ à l'infini.
- Les caractéristiques pour le calcul direct sont :
 - domaine $[-0.01, 1] \times [0, 0.5]$ avec bord attaque. Plaque plane commençant à $x_1 = 0$ et plaque rugueuse à $x_1 = 0.18$ et finissant à $x_1 = 0.98$,
 - condition de Dirichlet $\mathbf{u} = (0, 0)$ à la paroi,
 - 20 rugosités de dimensions $(\lambda, A) = (0.05, 0.005)$,
 - 9000 éléments Q1-Q1.
- Les caractéristiques avec la loi de paroi d'ordre zéro sont :
 - condition $\mathbf{u} = (0, 0)$ à la paroi,
 - domaine $[-0.01, 1] \times [0, 0.5]$ plaque plane lisse avec bord attaque,
 - 2500 éléments Q1-Q1.
- Les caractéristiques avec la loi de paroi d'ordre un et deux sont :
 - domaine $[-0.01, 1] \times [0, 0.5]$ plaque plane lisse avec bord attaque,
 - loi de paroi d'ordre un ou deux imposée à la paroi,
 - 2500 éléments Q1-Q1.

Les problèmes de cellules ont les caractéristiques suivantes :

- $Re = 10$,
- domaine $\Omega_{loc} \stackrel{approx}{=} [0, 10] \times [0, 20]$,
- rugosité de dimensions $(\lambda, A) = (5, 0.5)$,
- 2500 éléments Q1-Q1.

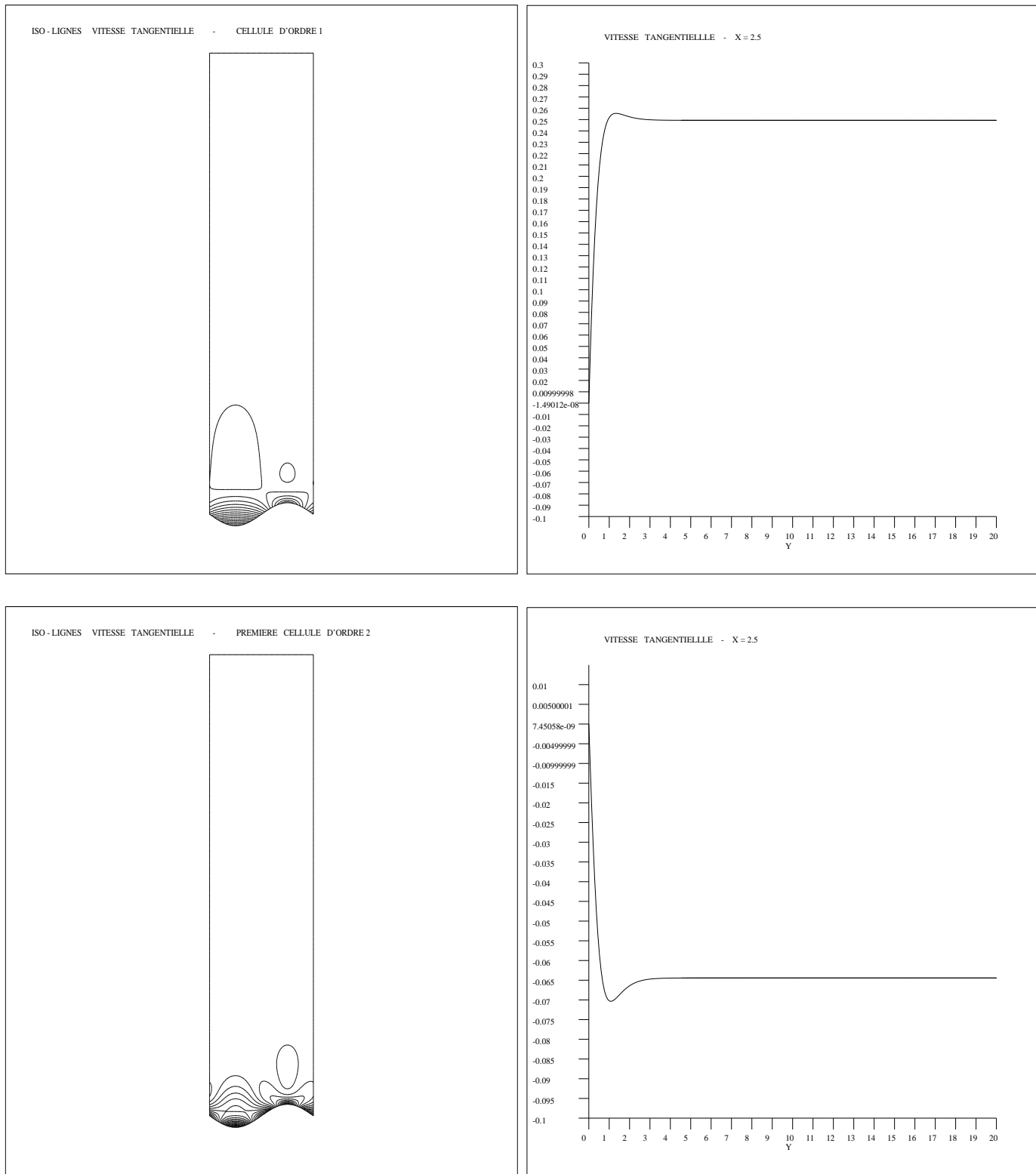


FIG. 6: Isovaleurs de la vitesse tangentielle calculés à partir des problèmes de Stokes locaux. En accord avec la théorie, les solutions tendent exponentiellement vers une constante à l'infini.

Le paramètre ε est fixé à 10^{-2} et on impose les lois de paroi d'ordre un et deux à la hauteur $\delta = 0.01$. Par la résolution des problèmes de Stokes dans les cellules (figures 6 et 7), on obtient les valeurs des constantes :

$$\overline{\chi}_{tt}^0 = 0.24936, \quad \overline{\chi}_{tt}^1 = -0.064 \text{ et } \quad \overline{\chi}_{tt}^2 = -4.5 \times 10^{-5}.$$

À partir de figures 8 et 9, on remarque la capacité des lois de paroi à reproduire l'influence des rugosités sur l'écoulement. En raison des petites dimensions des rugosités, la pression et le coefficient de friction ne sont pas influencés de façon significative. Néanmoins, le profil de vitesse est décalé vers le haut, ce qui est parfaitement approché par les lois de paroi d'ordres élevés. L'approximation à l'ordre un est déjà suffisamment précise pour que le passage à l'ordre deux apporte des corrections significatives (figures 10 et 11).

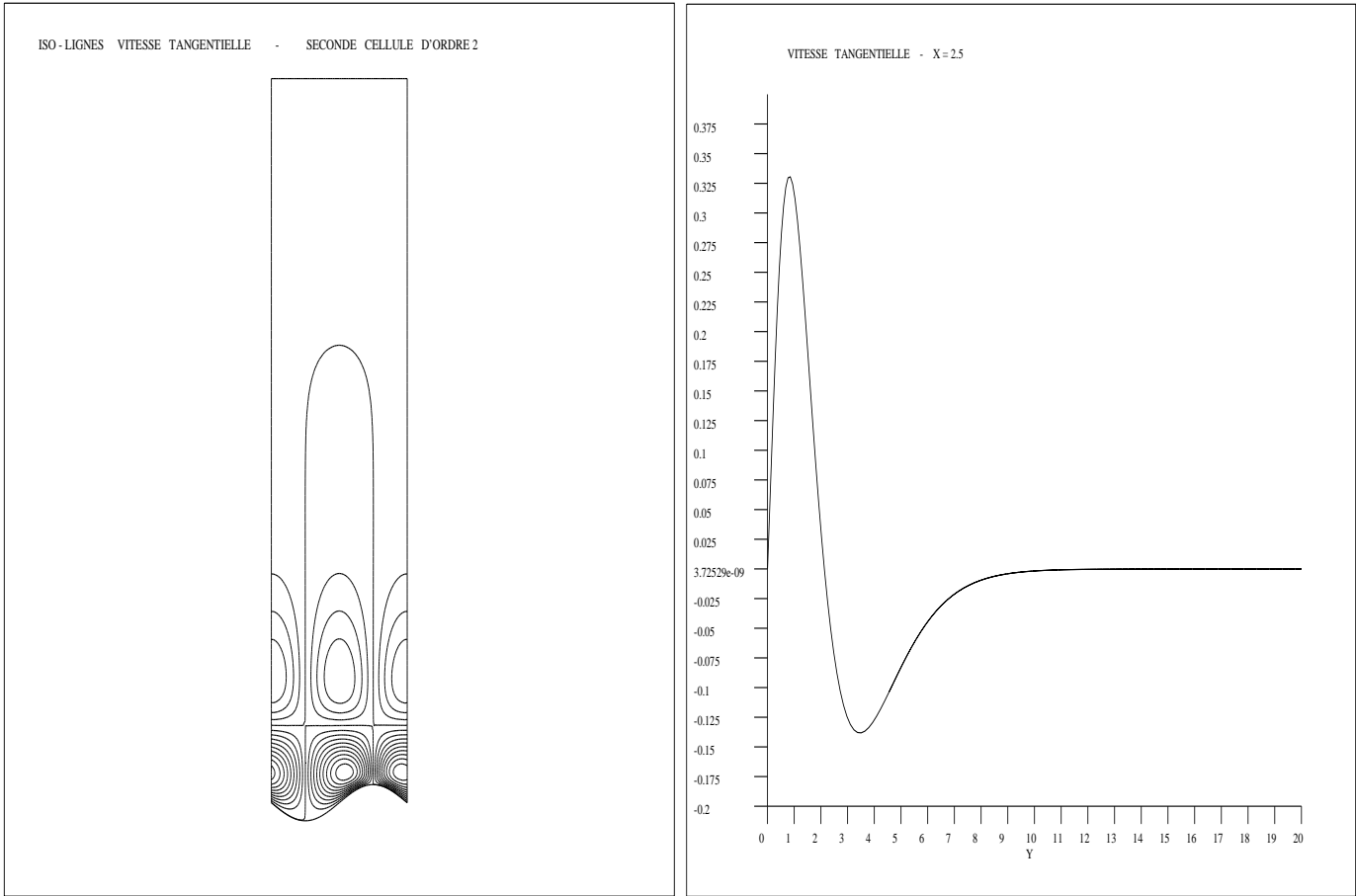


FIG. 7: Isovaleurs de la vitesse tangentielle calculés à partir du problème de Stokes local, associés au terme nonlinéaire contenu dans la loi de paroi d'ordre deux.

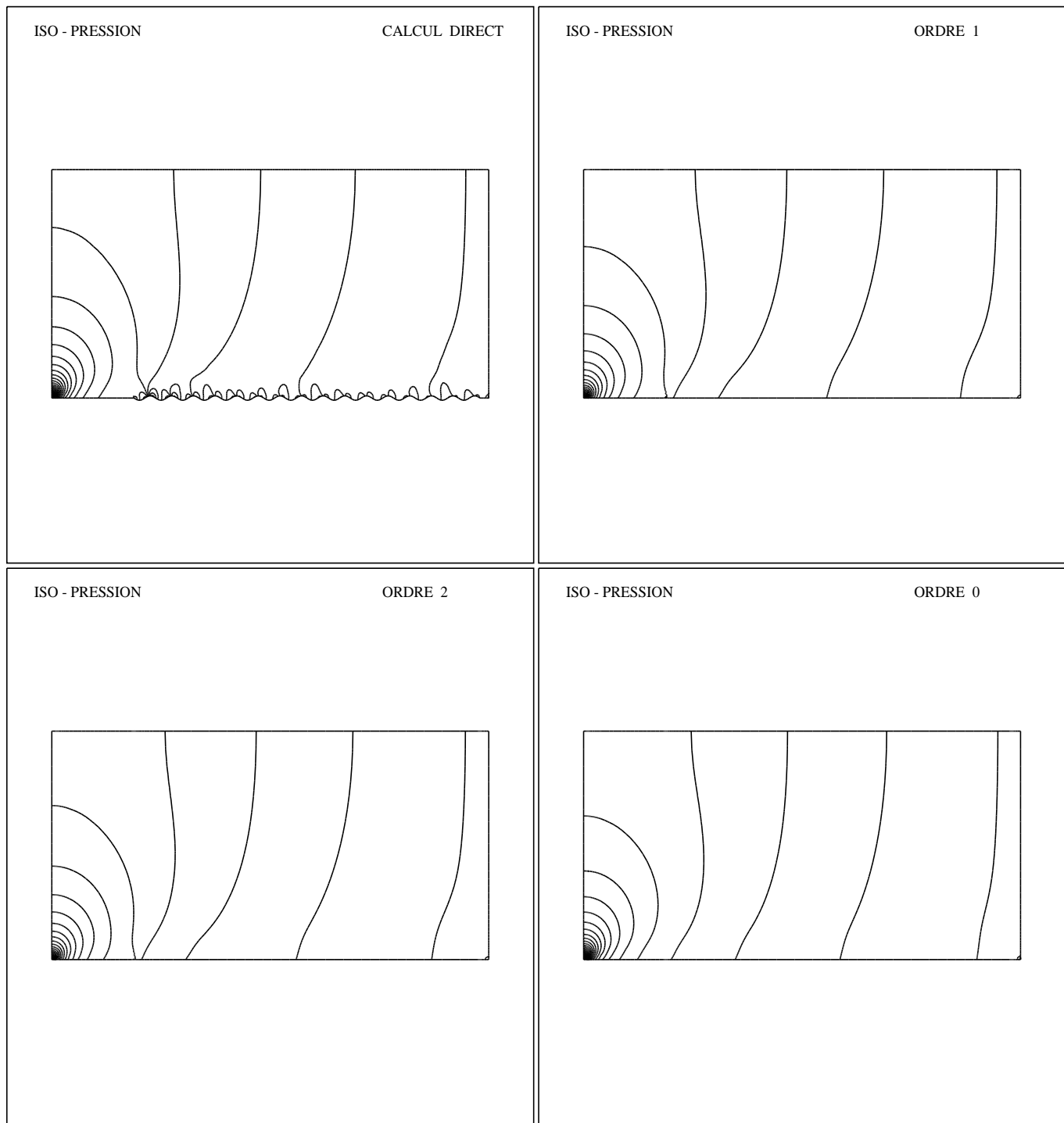


FIG. 8: Les isolignes de pression retrouvées avec les lois de paroi d'ordre 1 et 2 imposées à $\delta = 0.01$ approchent bien la solution avec $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ à la paroi. La paroi est constituée d'un bord attaque suivi d'une plaque plane et d'une plaque rugueuse.

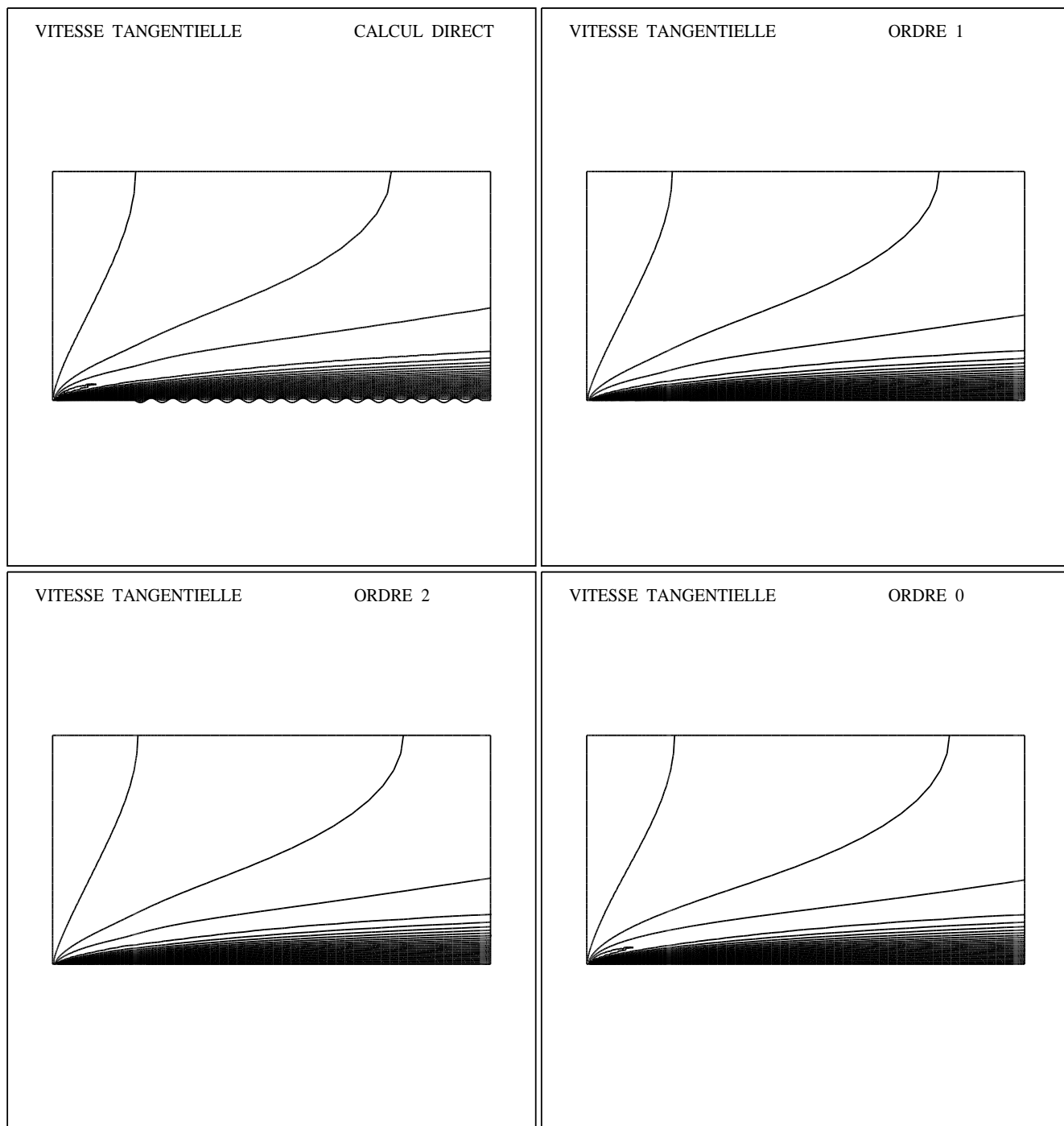


FIG. 9: Les isovaleurs de la vitesse tangentielle trouvées avec les lois de paroi d'ordre 1 et 2 imposées à $\delta = 0.01$ approchent bien la solution avec $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ à la paroi rugueuse.

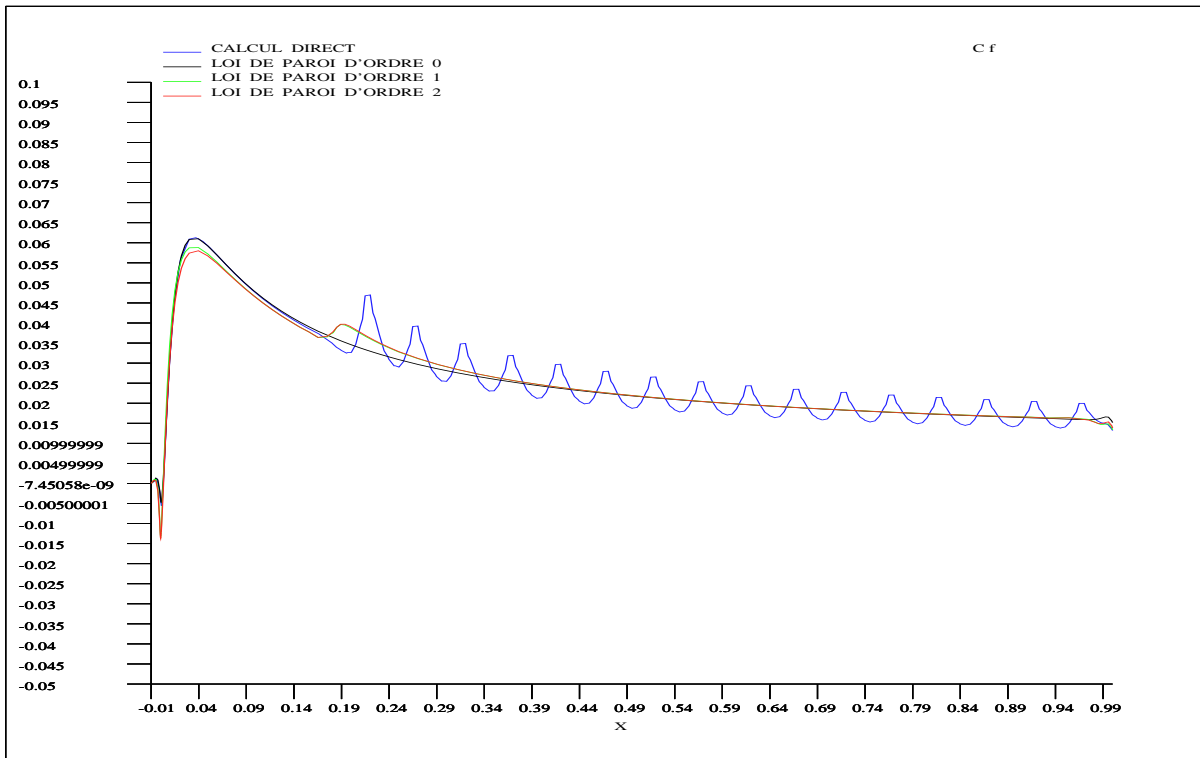
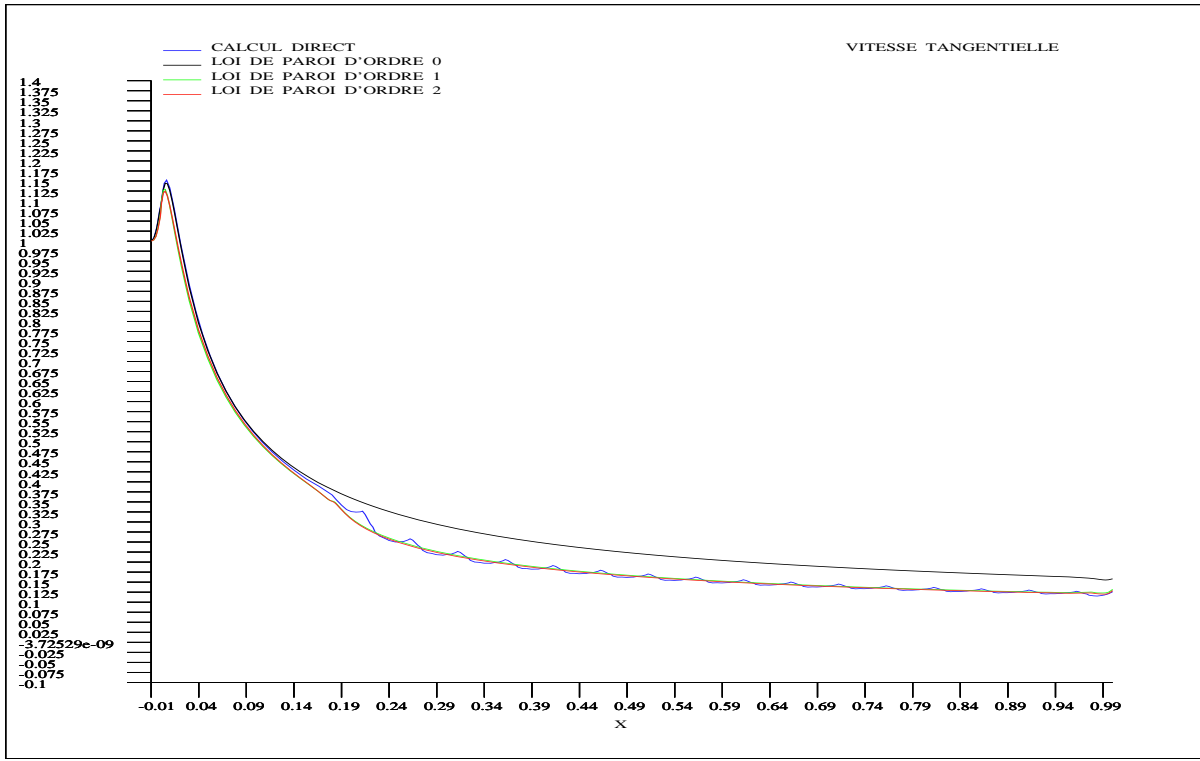


FIG. 10: Comparaison entre les lois de paroi d'ordre zéro, un, deux et le calcul direct. À partir des profils de vitesse et de C_f faits à partir des coupes à $\delta = 0.01$, on remarque l'amélioration apportée par les lois de paroi d'ordre élevé.

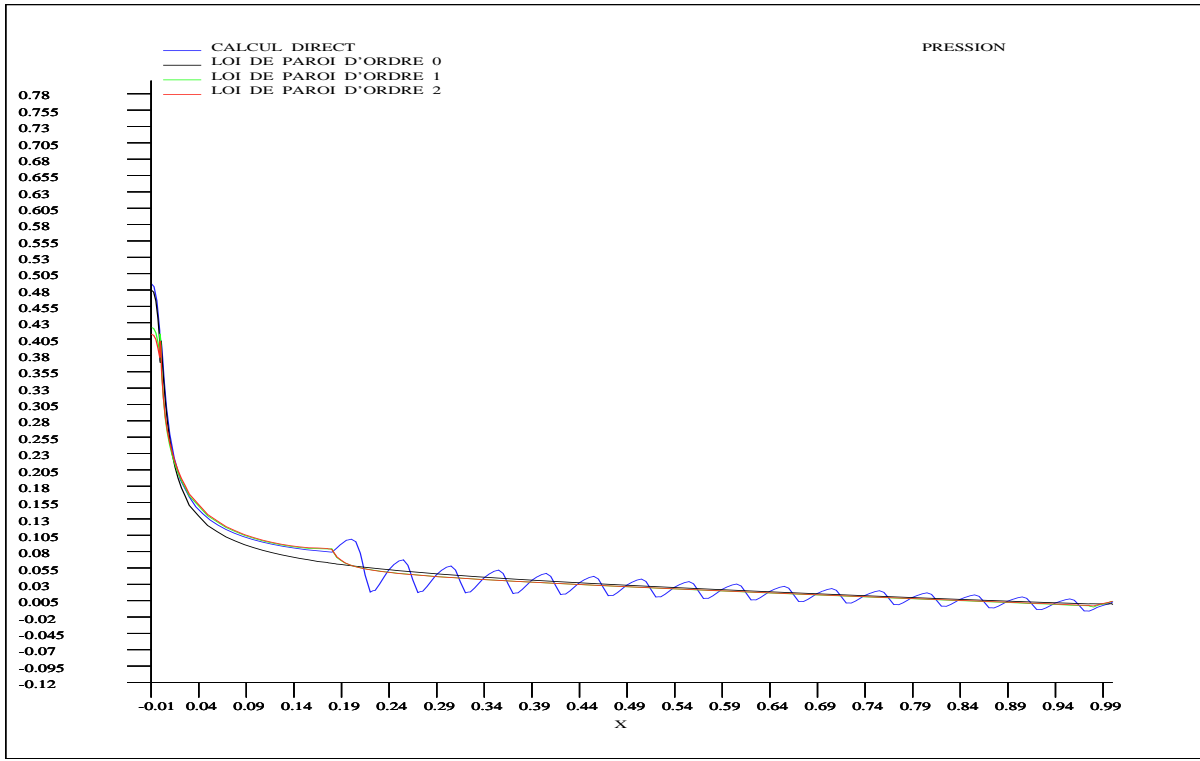


FIG. 11: *Comparaison entre les profils de pression à $\delta = 0.01$.*

5.3 Canal avec 2 types de rugosités

Le troisième problème est constitué d'un canal avec, à la frontière inférieure, une plaque plane suivie d'une plaque rugueuse constituée de rugosités de géométries différentes. La première partie rugueuse est constituée de rugosités non-symétriques et la deuxième par des rugosités sinusoïdales. Les objectifs de ce problème sont :

- i) montrer la flexibilité de l'approche pour traiter des domaines contenant différentes formes de rugosités,
- ii) étudier l'apport de la loi de paroi d'ordre deux en présence d'un gradient de pression plus important et
- iii) vérifier l'amélioration apportée par les lois de paroi pour simuler correctement la zone de transition entre les différentes plaques.

Les caractéristiques des domaines, en fonction du type de condition aux limites utilisées sont :

- $Re = 100$,
- un profil parabolique à l'entrée, à la frontière supérieure $\mathbf{u} = (0, 0)$ et $p = 0$ et $u^n = 0$ à la sortie.

- Les caractéristiques pour le calcul direct sont :
 - Condition de Dirichlet $\mathbf{u} = (0, 0)$ à la paroi,
 - Domaine : paroi inférieure plane $[0, 0.25] \times [0, 0.5]$, paroi avec rugosités non-symétriques $[0.25, 0.75] \times [0, 1.5]$, paroi avec rugosités sinusoïdales $[0.75, 1] \times [0, 1.5]$,
 - 10 rugosités non symétriques de dimensions $[0, 0.05] \times [0, 0.025]$ et 6 rugosités sinusoïdales de dimensions $[0, 0.04] \times [0, 0.01]$,
 - 12000 éléments Q1-Q1.
- Les caractéristiques avec la loi de paroi d'ordre zéro sont :
 - Condition de Dirichlet $\mathbf{u} = (0, 0)$ à la paroi,
 - Domaine : plaque plane $[0, 1] \times [0, 0.5]$,
 - 2500 éléments Q1-Q1.
- Les caractéristiques avec la loi de paroi d'ordre un et deux sont :
 - Loi de paroi d'ordre un ou deux à la paroi,
 - Domaine : plaque plane $[0, 0.25] \times [0.025, 0.5]$, plaque rugueuse $[0.75, 1] \times [0.025, 0.5]$,
 - 2400 éléments Q1-Q1.

Les caractéristiques du problème de cellule avec rugosité non-symétrique sont :

- $Re = 2.5$,
- condition de Dirichlet à la paroi (en fonction de l'ordre de l'approximation), condition de y_1 -périodicité pour \mathbf{u} à l'entrée et sortie et $\frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = 0$ et $u^n = 0$ à l'infini,
- domaine $\Omega_{loc} \stackrel{approx}{=} [0, 2] \times [0, 5]$,
- rugosité de dimensions $(\lambda, A) = (1, 1)$,
- 2500 éléments Q1-Q1.

Les caractéristiques du problème de cellule avec rugosité symétrique sont :

- $Re = 2.5$,
- condition de Dirichlet à la paroi (en fonction de l'ordre de l'approximation), condition de y_1 -périodicité pour \mathbf{u} à l'entrée et sortie et $\frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = 0$ et $u^n = 0$ à l'infini,

- domaine $\Omega_{loc} \stackrel{approx}{=} [0, 1.6] \times [0, 5]$,
- rugosité de dimensions $(\lambda, A) = (1.6, 0.4)$,
- 2500 éléments Q1-Q1.

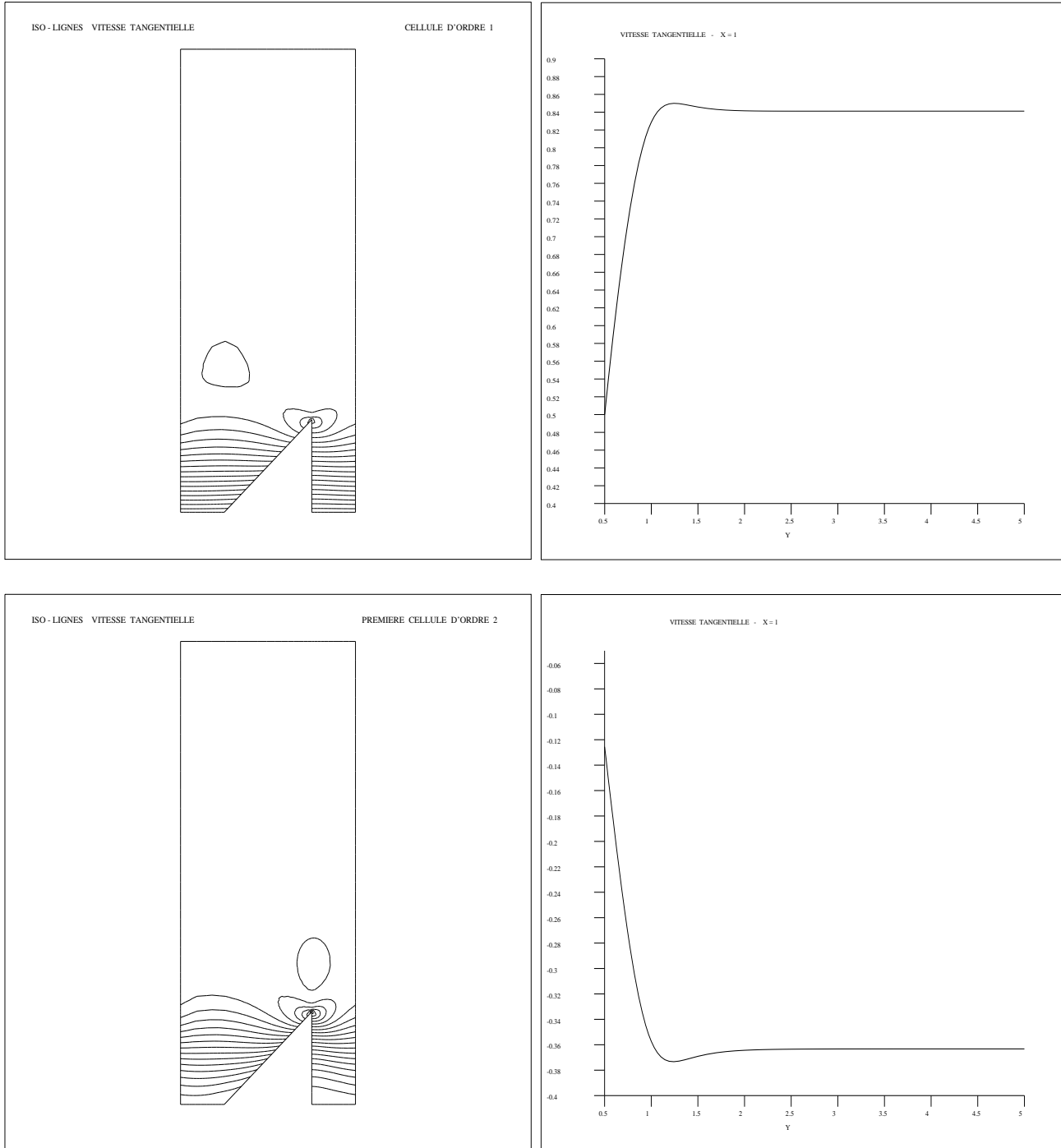


FIG. 12: *Problème de cellule d'ordre un et premier problème de cellule d'ordre deux. On remarque que les profils de vitesse tangentielle tendent vers des constantes avec y_2 .*

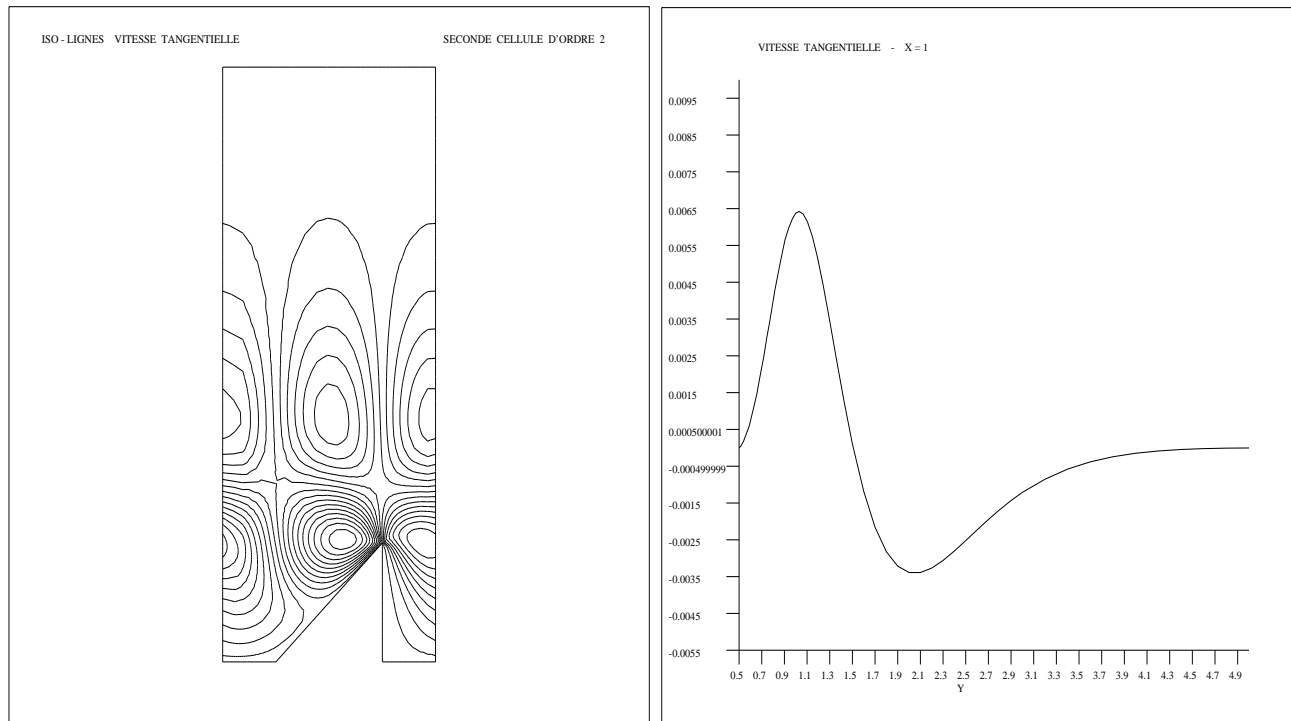


FIG. 13: Deuxième problème de cellule d'ordre deux associé à la rugosité non symétrique. Encore une fois, la vitesse tangentielle tend vers une constante avec y_2 .

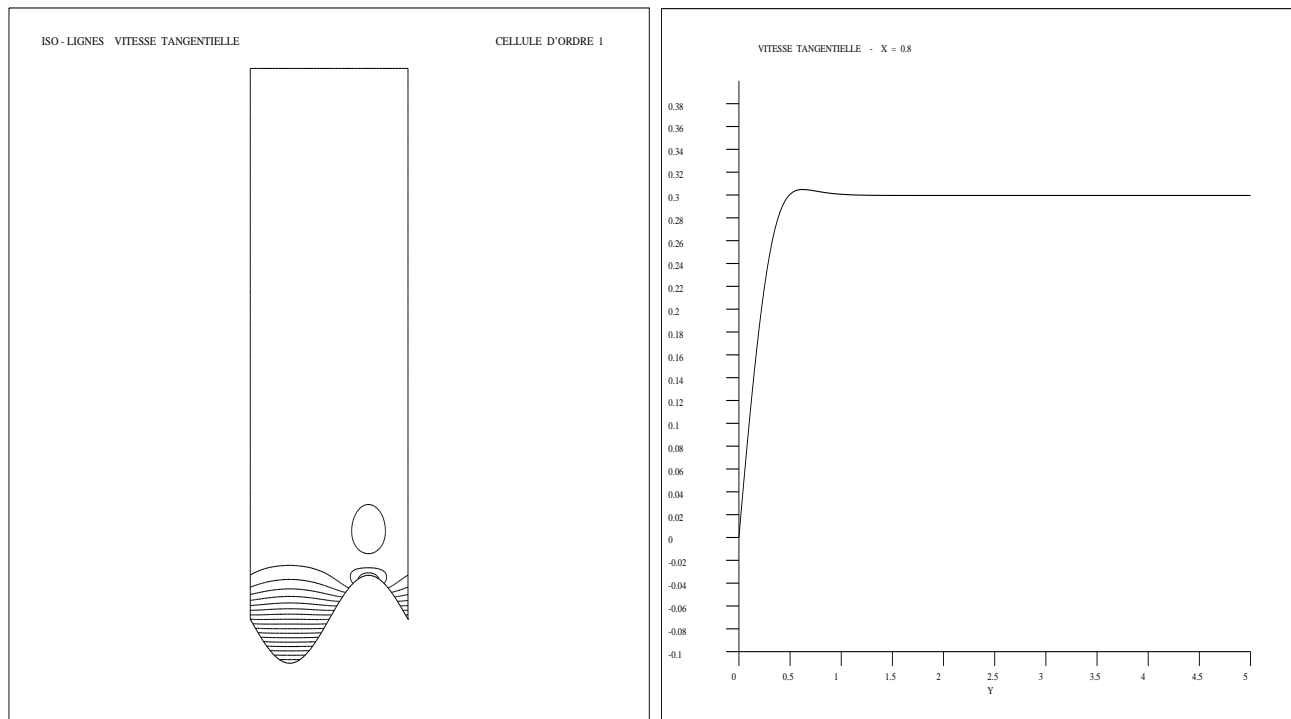


FIG. 14: Problème de cellule d'ordre un pour la rugosité symétrique.

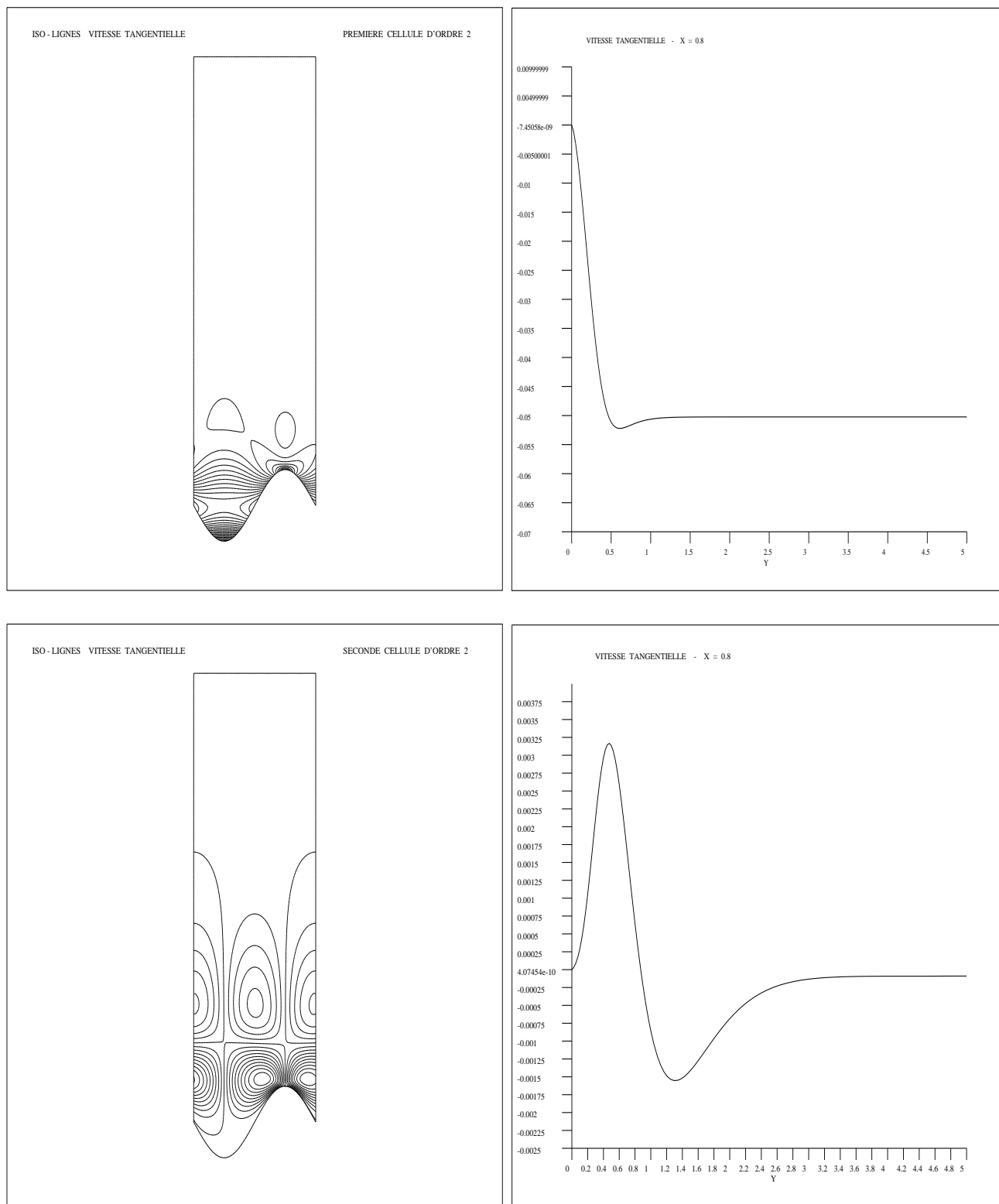


FIG. 15: Problèmes de cellules d'ordre deux pour la rugosité symétrique.

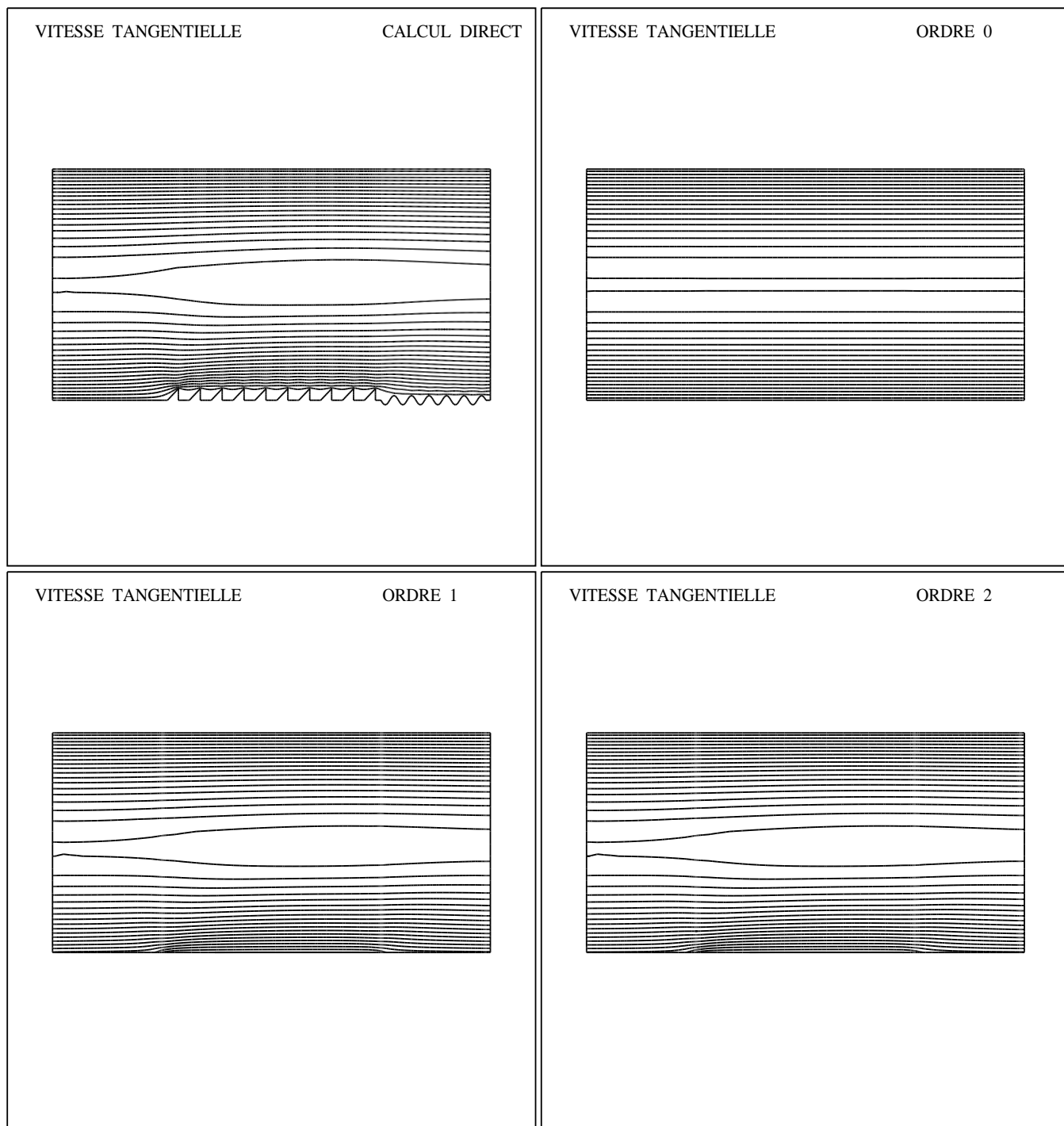


FIG. 16: Les isovaleurs de la vitesse tangentielle obtenus par un calcul direct sur les rugosités et en utilisant les différentes lois de paroi. Pour les lois de paroi d'ordre un et deux, la distance à la paroi est $\delta = 0.025$.

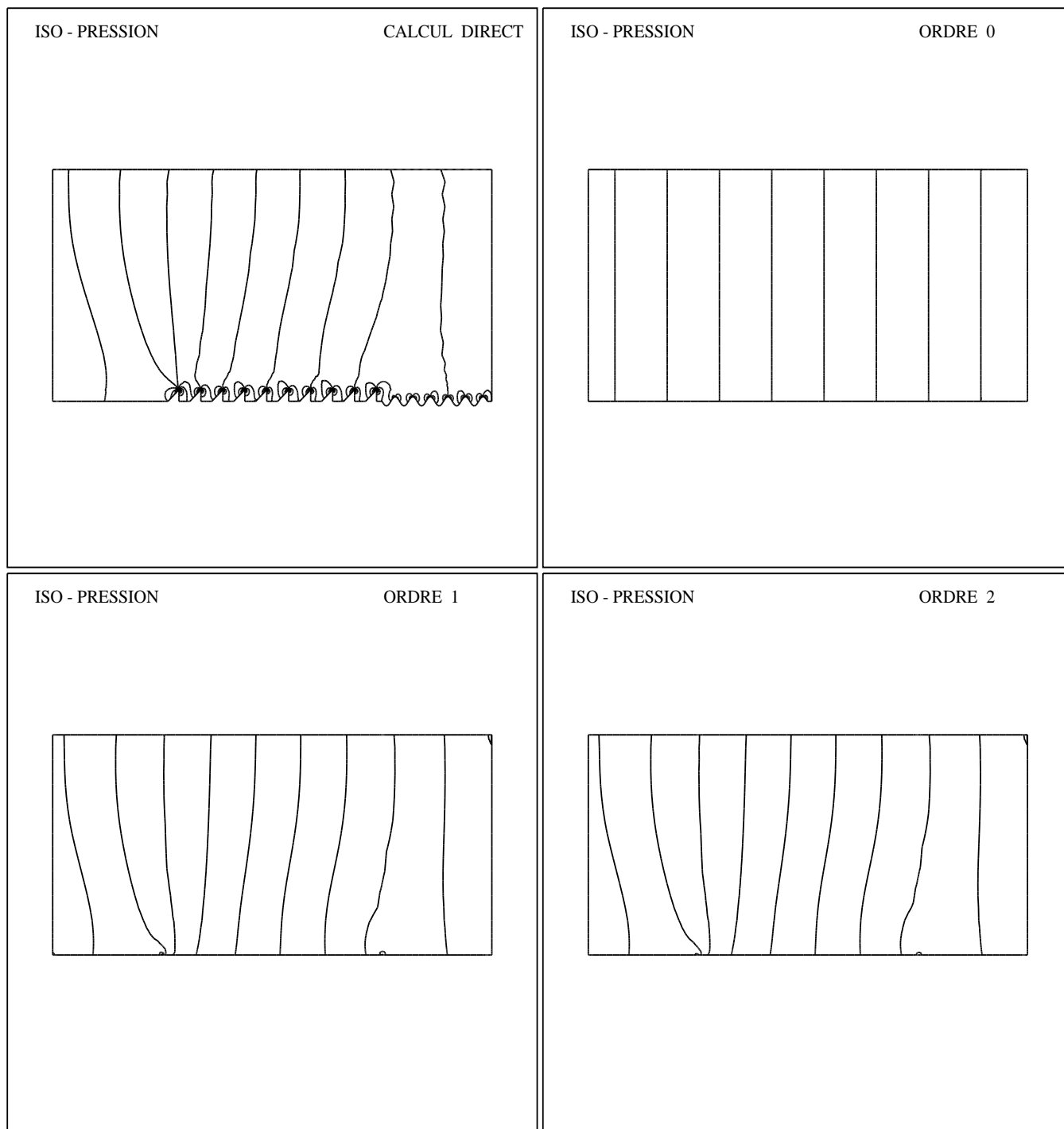


FIG. 17: Les isopression obtenus par un calcul direct sur les rugosités et en utilisant les différents lois de paroi. Pour les lois de paroi d'ordre un et deux, la distance à la paroi est $\delta = 0.025$.

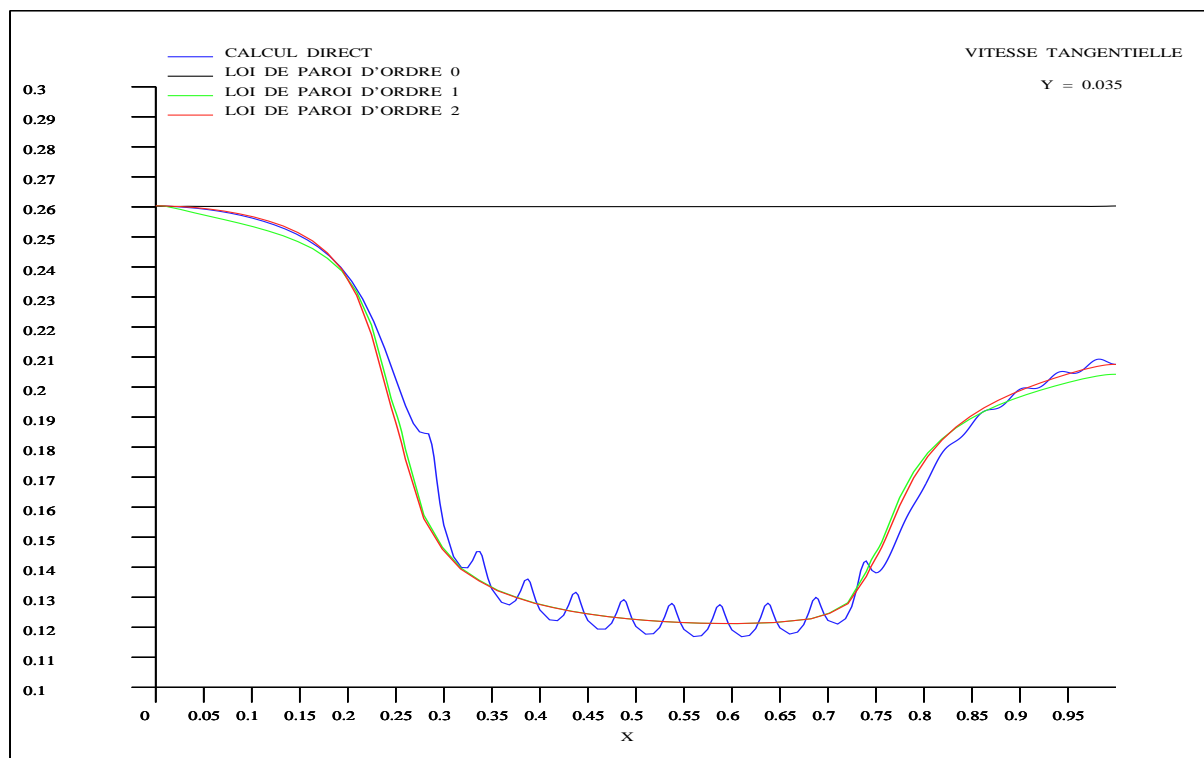
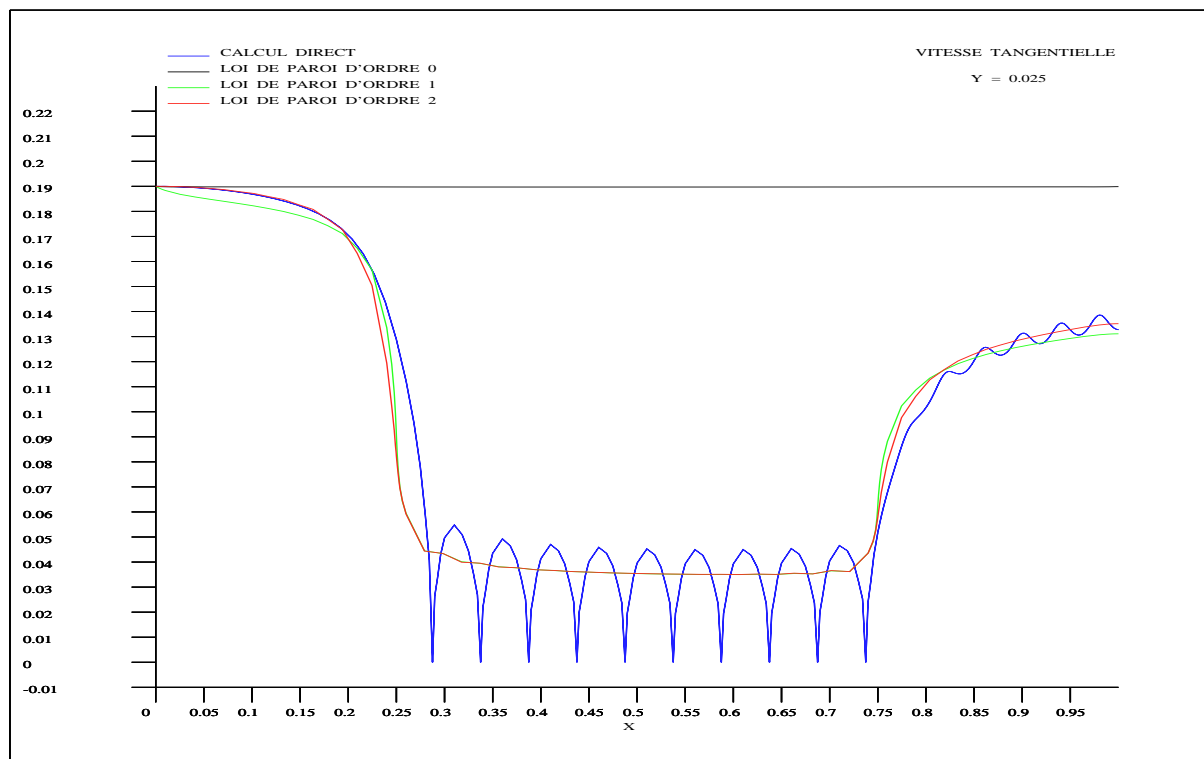


FIG. 18: On compare le profil de vitesse tangentielle entre un calcul direct et les différentes lois de paroi à $\delta = 0.025$ (en haut). En se plaçant à la hauteur $\delta = 0.035$, on remarque que les lois de paroi se rapprochent du profil donné par le calcul direct.

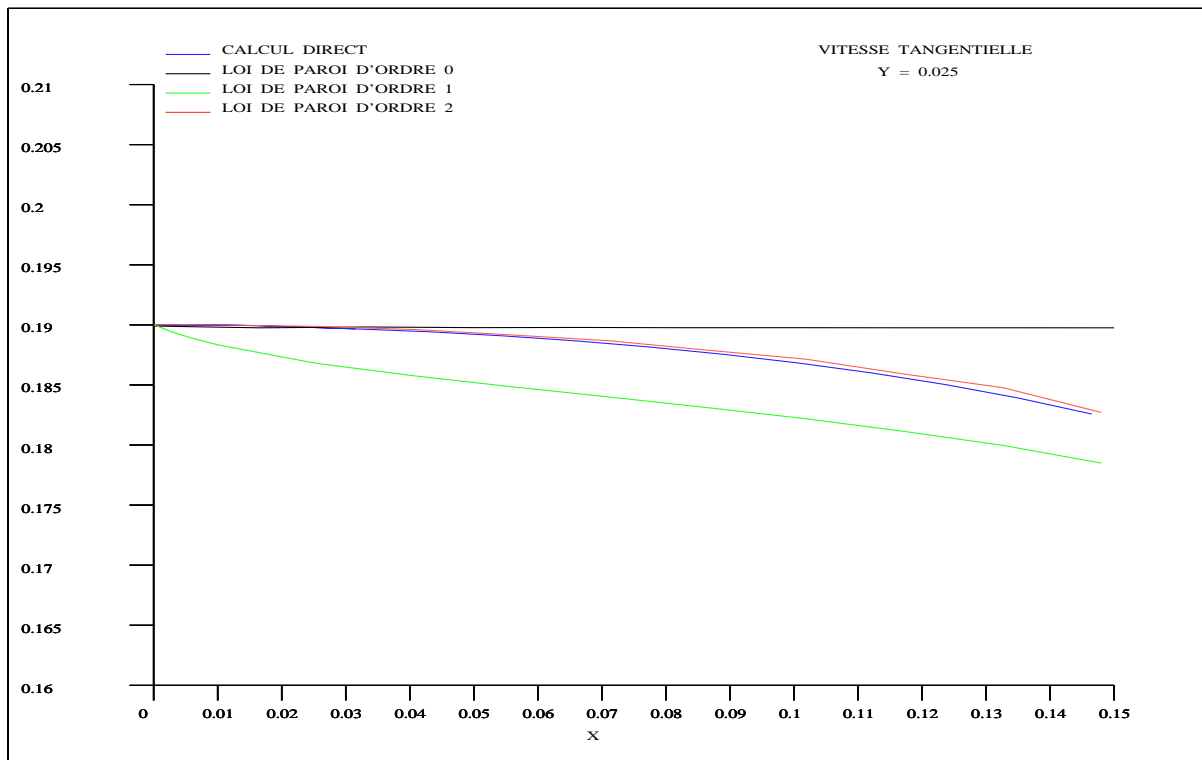
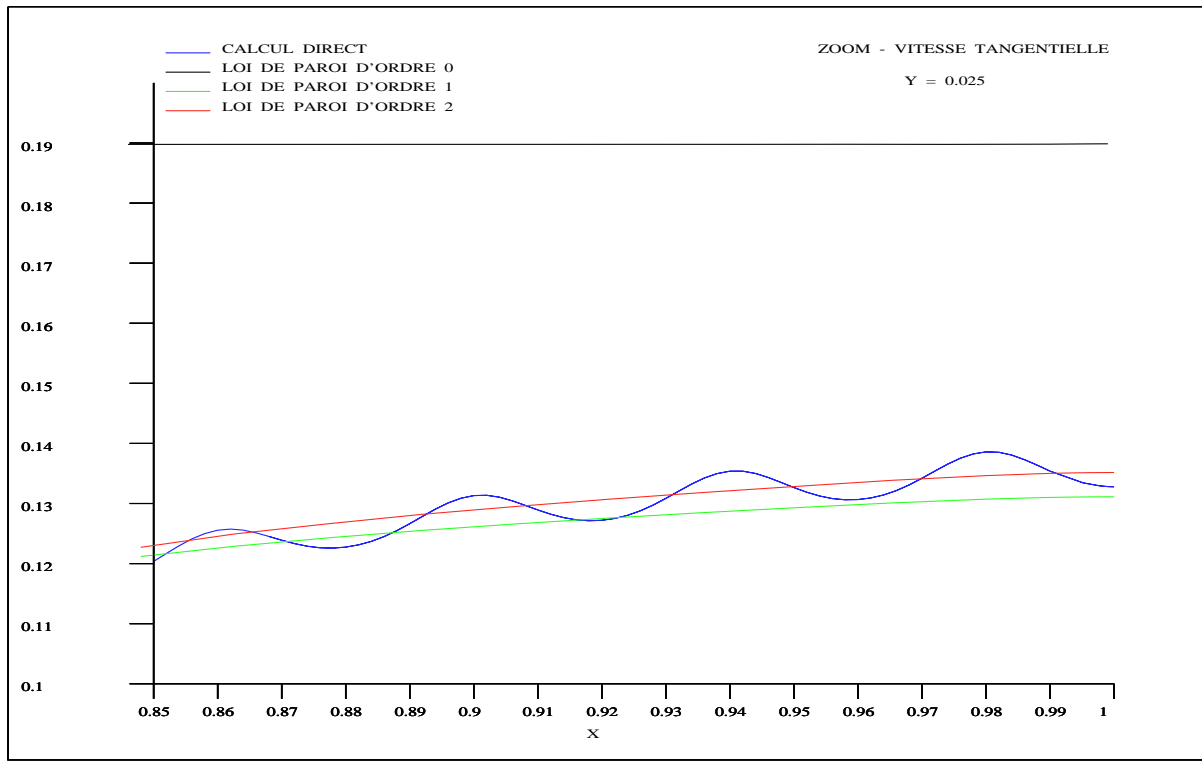


FIG. 19: Zoom de la vitesse tangentielle. L'ordre deux apporte une amélioration sensible à l'approximation d'ordre un ($\delta = 0.025$).

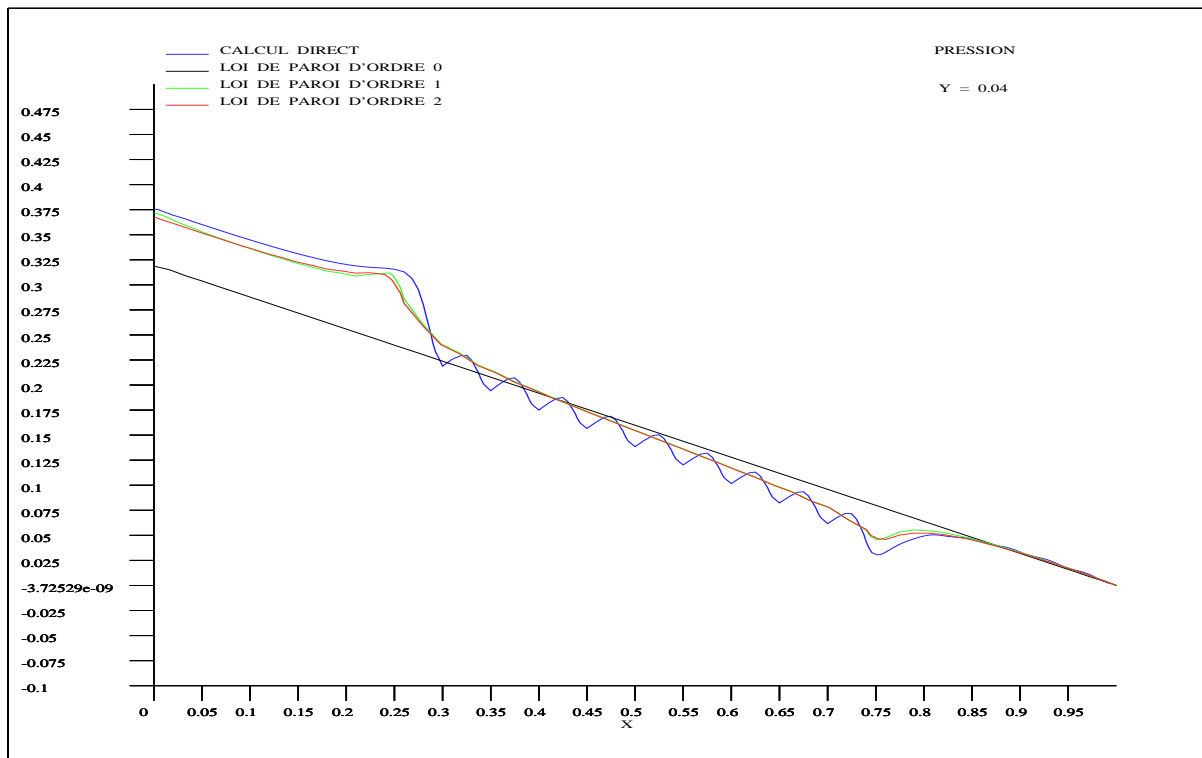
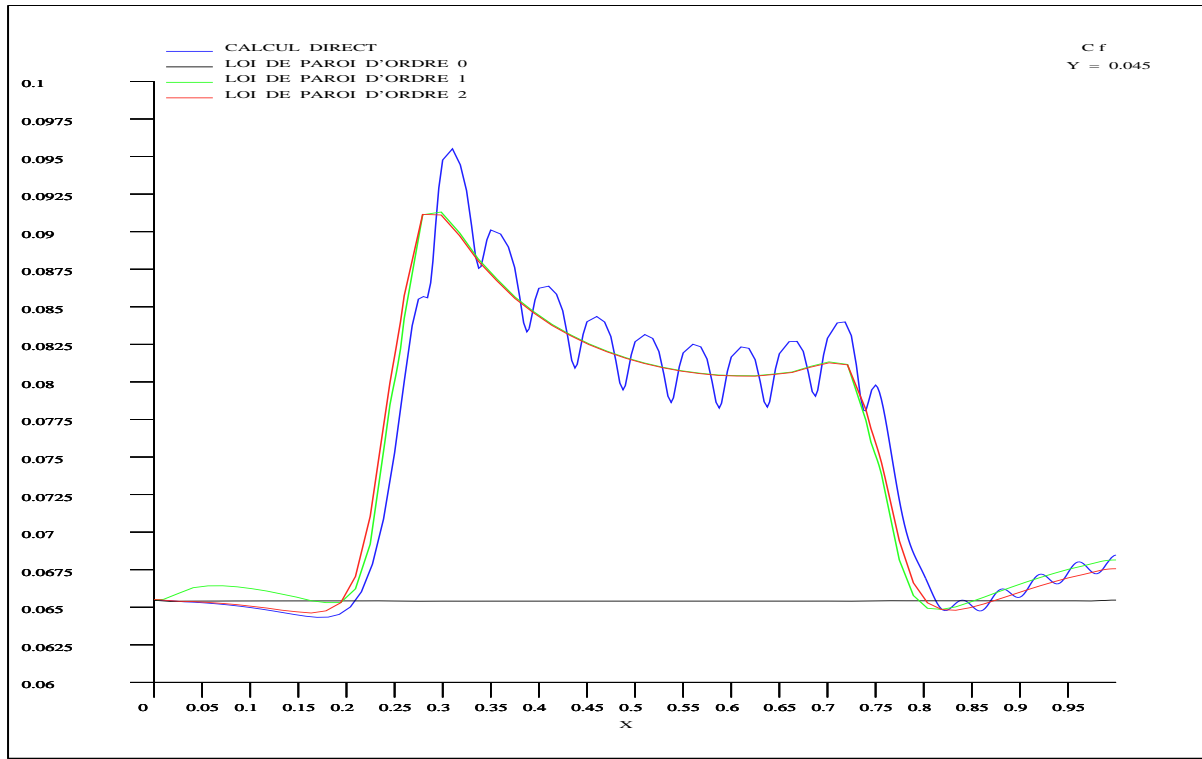


FIG. 20: On compare les profils du C_f à $\delta = 0.045$ et de pression à $\delta = 0.04$. On observe la nécessité de l'utilisation des lois de paroi d'ordre élevé pour simuler correctement les profils de C_f , pression et les zones de transition entre les différentes géométries. L'amélioration apportée par l'ordre deux est importante principalement pour le coefficient de friction.

D'abord, on résout les problèmes de cellules associés aux différentes formes des rugosités (figures 12-15). On fixe le paramètre $\varepsilon = 0.025$ et on choisit dans un premier moment d'imposer les lois de paroi à $\delta = 0.025$. Pour chaque type de rugosités, on résout trois problèmes de cellules. Pour la rugosité non-symétrique, on obtient les constantes d'homogénéisation :

$$\overline{\chi}_{tt}^0 = 0.8411, \overline{\chi}_{tt}^1 = -0.363 \text{ et } \overline{\chi}_t^2 = 2.63 \times 10^{-5}.$$

Pour la rugosité sinusoïdale, les constantes sont :

$$\overline{\chi}_{tt}^0 = 0.3, \overline{\chi}_{tt}^1 = -0.05 \text{ et } \overline{\chi}_t^2 = 9 \times 10^{-5},$$

et pour la partie plaque plane $\overline{\chi}_{tt}^0 = \overline{\chi}_{tt}^1 = \overline{\chi}_t^2 = 0$.

L'utilisation des lois de paroi permet de reproduire correctement l'influence des différentes formes de rugosités sur l'écoulement, par le biais des constantes d'homogénéisation (figures 16 et 17). En effet, par des coupes de la vitesse, de la pression et du C_f , on remarque la nécessité de leur utilisation, puisque toutes ces variables sont influencées de façon significative, par la présence des rugosités (figures 18 et 20). De plus, le passage à l'ordre deux apporte des améliorations sensibles sur l'approximation (figure 19).

5.4 Diffuseur avec rugosités sinusoïdales

Le domaine est un diffuseur contenant sur sa partie inférieure, une plaque plane, suivie d'une plaque rugueuse avec des rugosités sinusoïdales et d'une nouvelle plaque plane. L'objectif est de vérifier l'importance de l'utilisation des approximations d'ordre élevé pour des écoulements présentant un important gradient de pression. De plus, on étudie la prise en compte par les lois de paroi des transitions plaque plane-rugueuse-plane, souvent retrouvées dans la pratique. Dans un premier temps, le nombre de Reynolds est pris de façon à respecter la théorie, pour ensuite être fixé à la limite de celle-ci. Les caractéristiques du problème sont :

- $Re = 100$ et $Re = 500$,
- un profil parabolique à l'entrée, à la frontière supérieure $\mathbf{u} = (0, 0)$ et $p = 0$ et $u^n = 0$ à la sortie.
- Les caractéristiques pour le calcul direct sont :
 - Condition de Dirichlet $\mathbf{u} = (0, 0)$ à la paroi inférieure,
 - Domaine avec la paroi inférieure : plane $[0, 0.26]$, rugueuse $[0.26, 0.74]$, plane $[0.74, 1]$, l'entrée de dimensions $[0, 0.2]$ avec un angle $\theta \approx 21.8$,
 - 12 rugosités sinusoïdales de dimensions $(\lambda, A) = (0.04, 0.01)$,

- 9600 éléments Q1-Q1.
- Les caractéristiques avec la loi de paroi d'ordre zéro sont :
 - Condition de Dirichlet $\mathbf{u} = (0, 0)$ à la paroi,
 - Domaine : plaque plane $[0, 1]$, l'entrée de dimensions $[0, 0.2]$ avec un angle $\theta \approx 21.8$,
 - 2600 éléments Q1-Q1.
- Les caractéristiques avec la loi de paroi d'ordre un et deux sont :
 - Loi de paroi d'ordre un ou deux à la paroi,
 - Domaine : plaque plane $[0, 0.26]$, plaque rugueuse $[0.26, 0.74]$, plaque plane $[0.74, 1]$, l'entrée de dimensions $[0.01, 0.2]$ avec un angle $\theta \approx 21.8$,
 - 2400 éléments Q1-Q1.

Les caractéristiques du problème de cellule sont :

- $\text{Re} = 1$ et $\text{Re} = 5$,
- $\mathbf{u} = (0, 0)$ à la paroi, condition de périodicité pour \mathbf{u} à l'entrée et sortie et $\frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = 1$ (où $\frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = 5$ à l'ordre deux) et $u^n = 0$ à l'infini,
- Domaine : $[0, 4] \times [0, 5]$ avec rugosités de dimensions $[0, 4] \times [0, 1]$,
- 2000 éléments Q1-Q1.

La résolution des problèmes de cellules à l'ordre un et deux (figures 21 et 22) avec $\varepsilon = 0.01$ et la distance à la paroi fixée à $\delta = 0.015$, nous donne les constantes d'homogénéisation pour la frontière rugueuse avec $\text{Re} = 1$,

$$\overline{\chi}_{tt}^0 = 0.7, \quad \overline{\chi}_{tt}^1 = -0.05 \text{ et } \overline{\chi}_t^2 = -1.5 \times 10^{-4},$$

et avec $\text{Re} = 5$,

$$\overline{\chi}_{tt}^0 = 0.7, \quad \overline{\chi}_{tt}^1 = -0.05 \text{ et } \overline{\chi}_t^2 = -7.5 \times 10^{-4}.$$

Pour la partie plaque plane, les constantes sont données simplement par $\overline{\chi}_{tt}^0 = \overline{\chi}_{tt}^1 = \overline{\chi}_t^2 = 0$.

L'utilisation des lois de paroi d'ordres élevés avec le Reynolds fixé à 100, est nécessaire pour approcher correctement les profils de vitesse, pression et coefficient de pression (figures 23 et 24). Les coupes des solutions (figures 25 et 26) montrent clairement les améliorations sur la précision de l'approximation. De plus, le passage à l'ordre deux apporte une correction sensible sur l'approximation à l'ordre un (figure 27).

À Reynolds 500, les mêmes caractéristiques sont retrouvées (figure 28). Cependant, l'écoulement reste à la limite de la théorie et on remarque une certaine perte de précision de l'approximation (figure 29), bien que celle-ci reste encore assez satisfaisant. Pour des écoulements à forts Reynolds, proches de la turbulence, on devra se placer dans un régime asymptotique différent, conduisant à un autre développement. Ce sera fait dans de prochains travaux.

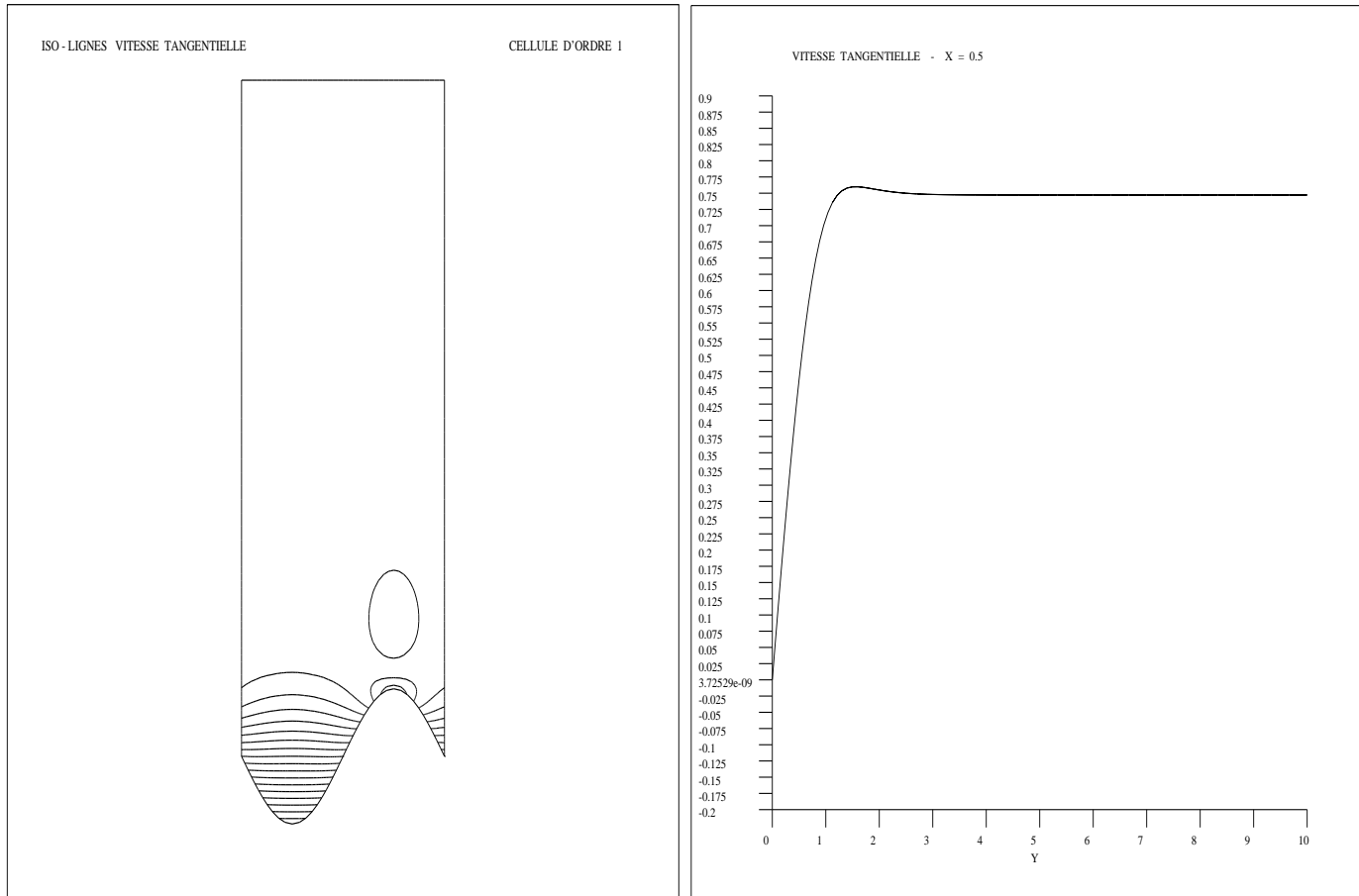


FIG. 21: *Problème de cellule d'ordre un. Isovaleurs et coupe de la vitesse tangentielle.*

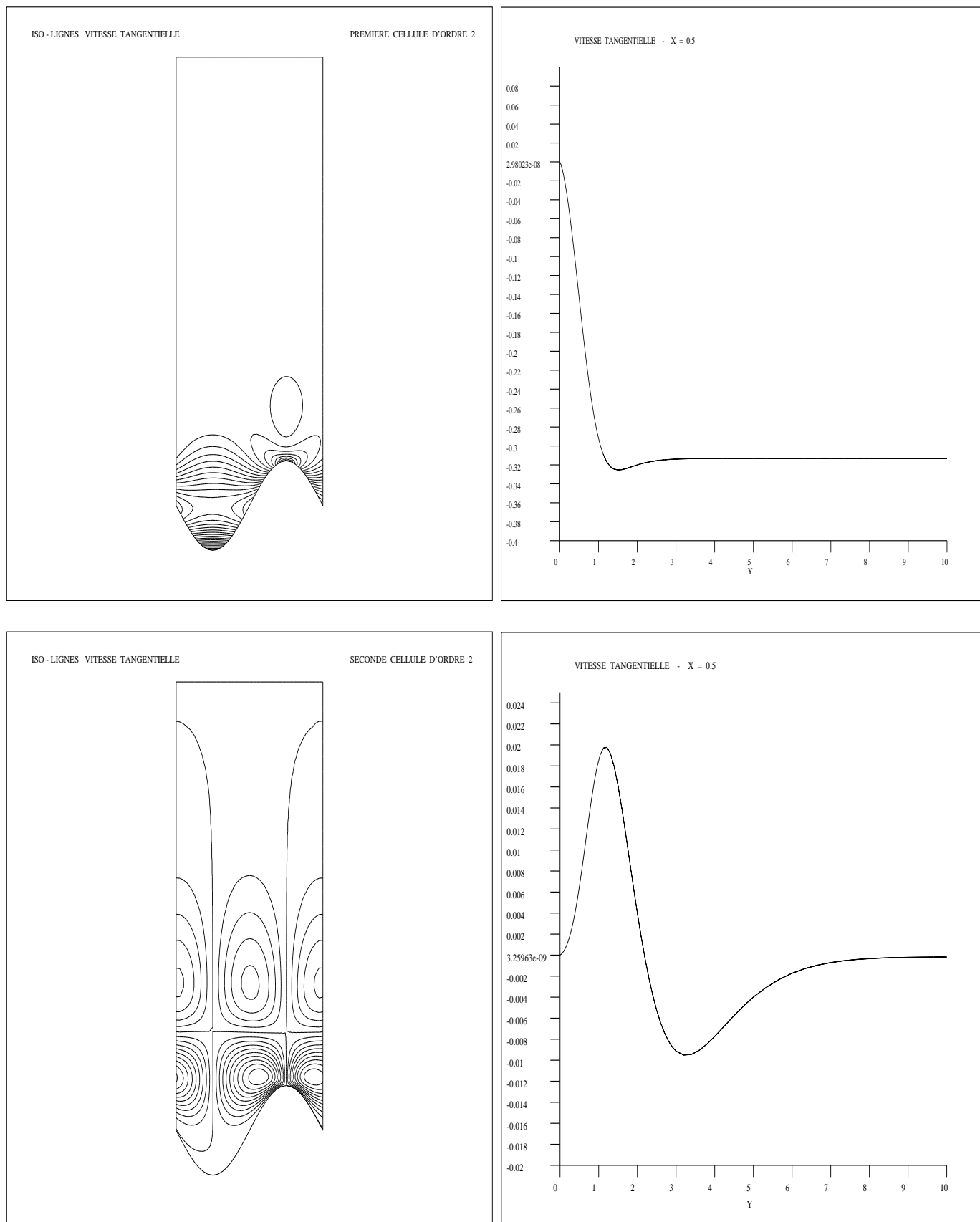


FIG. 22: Problèmes de cellule d'ordre deux associés au terme de pression et au terme non-linéaire contenu dans la loi de paroi d'ordre deux.

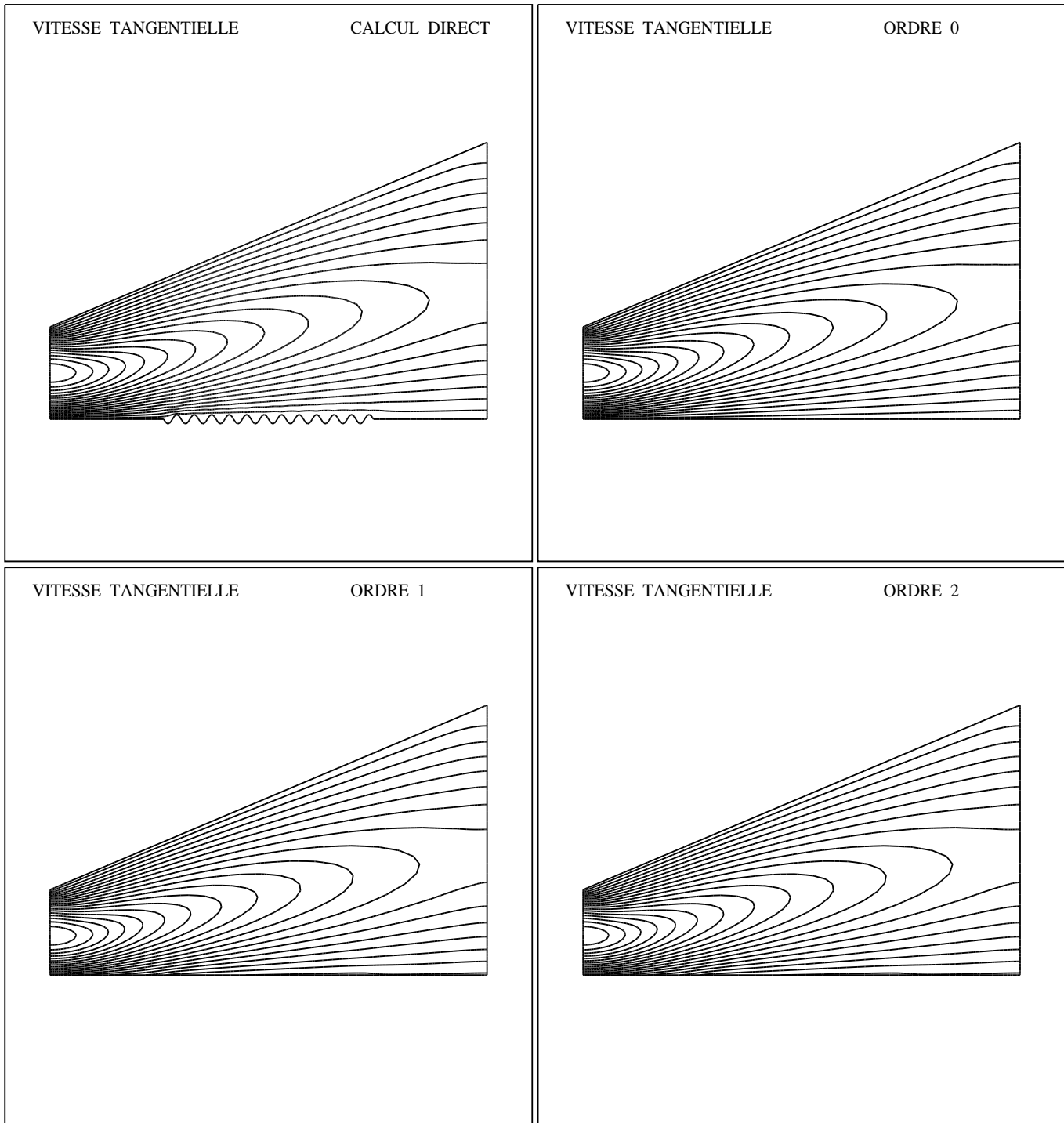


FIG. 23: Les isovaleurs de la vitesse tangentielle obtenus par un calcul direct sur les rugosités et en utilisant les différentes lois de paroi à $Re=100$. Pour les lois de paroi d'ordre un et deux, la distance à la paroi est fixée à $\delta = 0.015$.

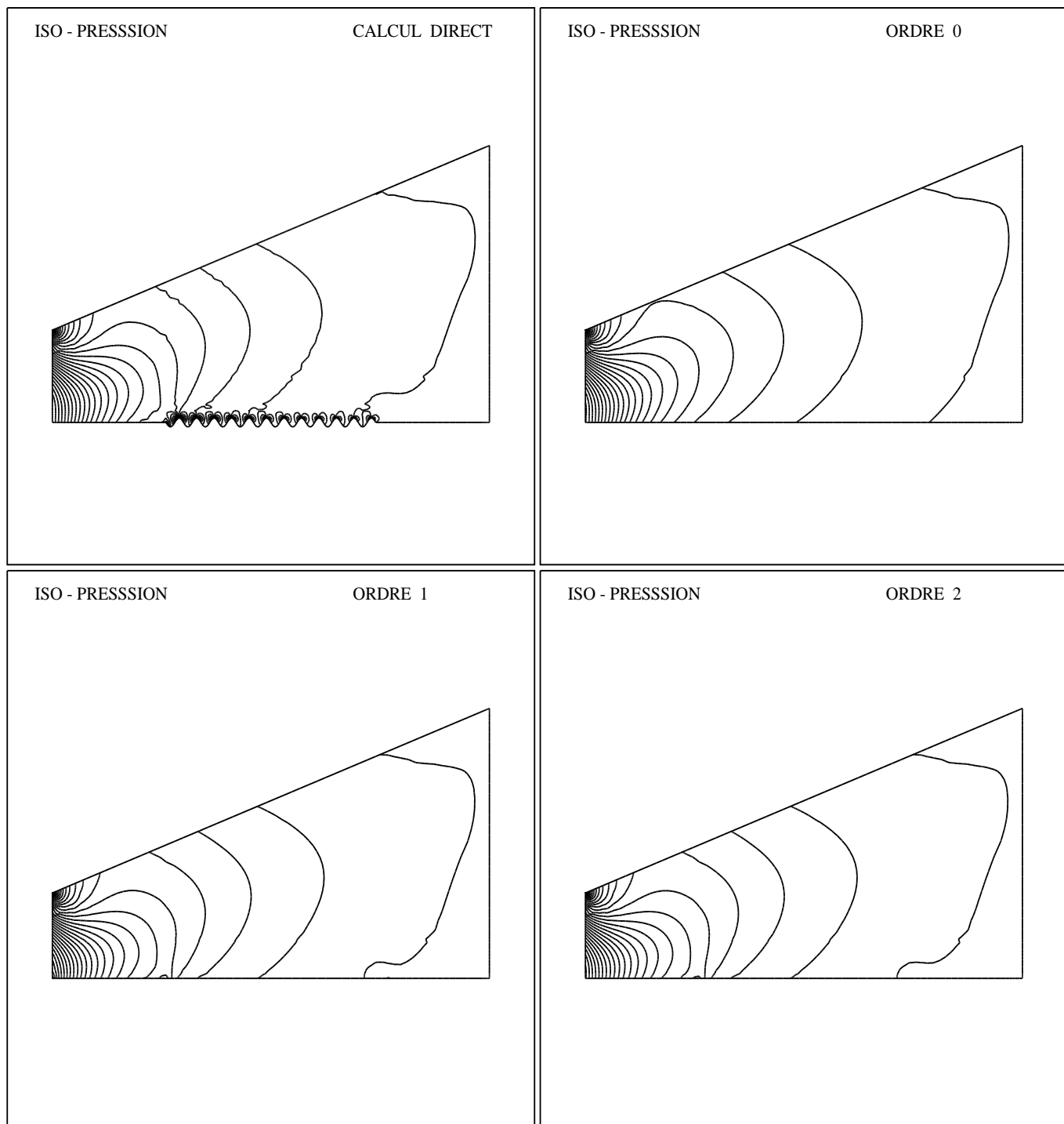


FIG. 24: Les iso-pressure obtenus par un calcul direct sur les rugosités et en utilisant les différentes lois de paroi. Pour les lois de paroi d'ordre un et deux, la distance à la paroi est fixée à $\delta = 0.015$ ($Re=100$).

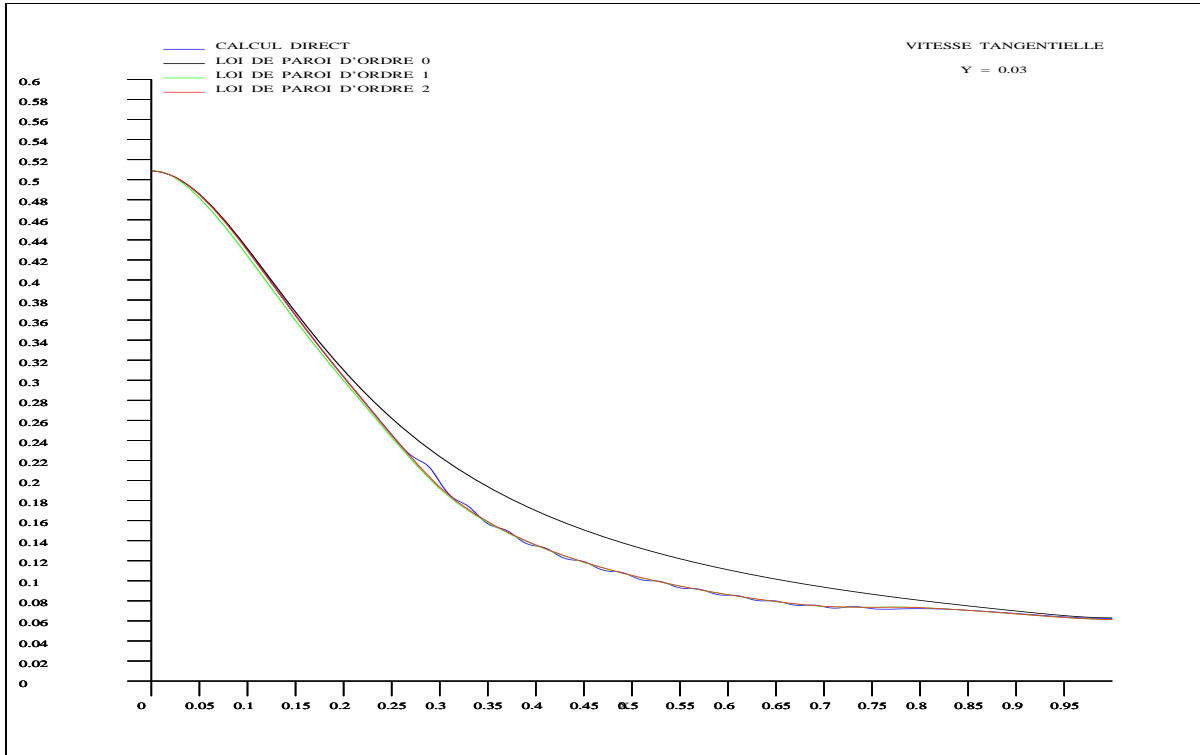
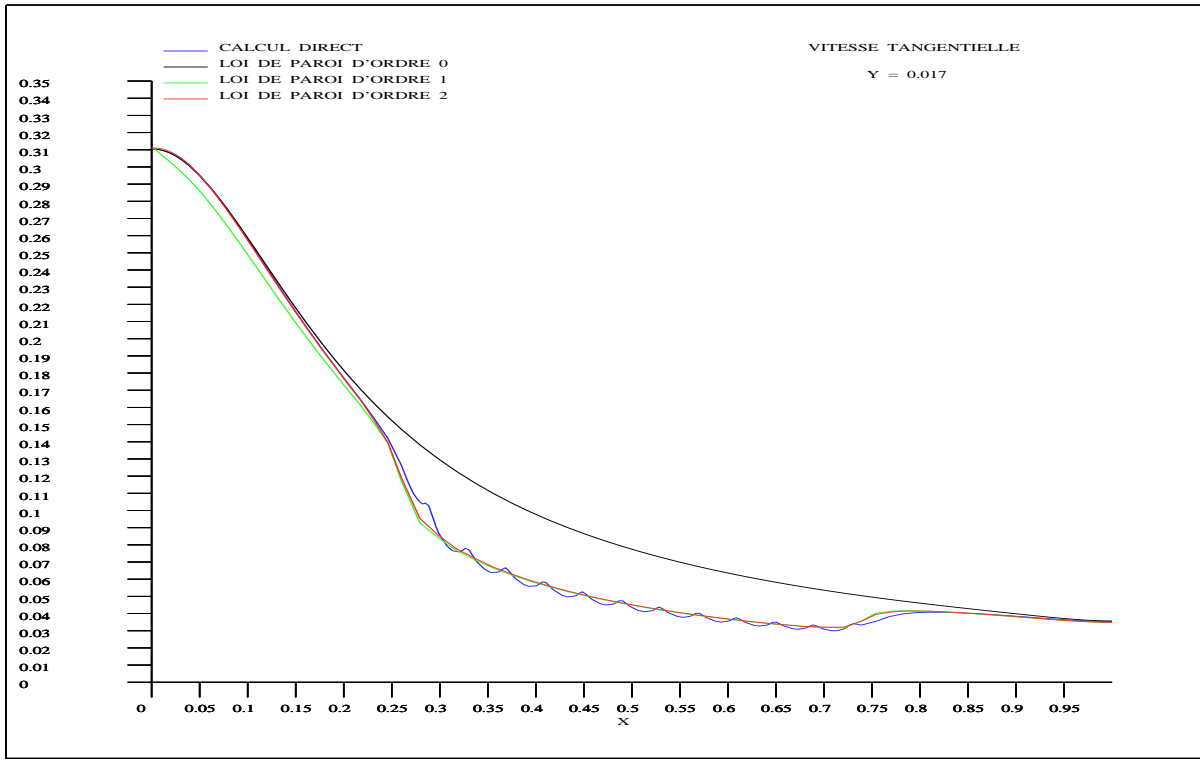


FIG. 25: Comparaison entre les lois de paroi d'ordre zéro, un, deux et le calcul direct à $Re=100$. Les profils de vitesse faits à partir des coupes à $\delta = 0.017$ et $\delta = 0.03$, montrent la convergence des profils vers la solution obtenue par le calcul direct, validant la théorie.

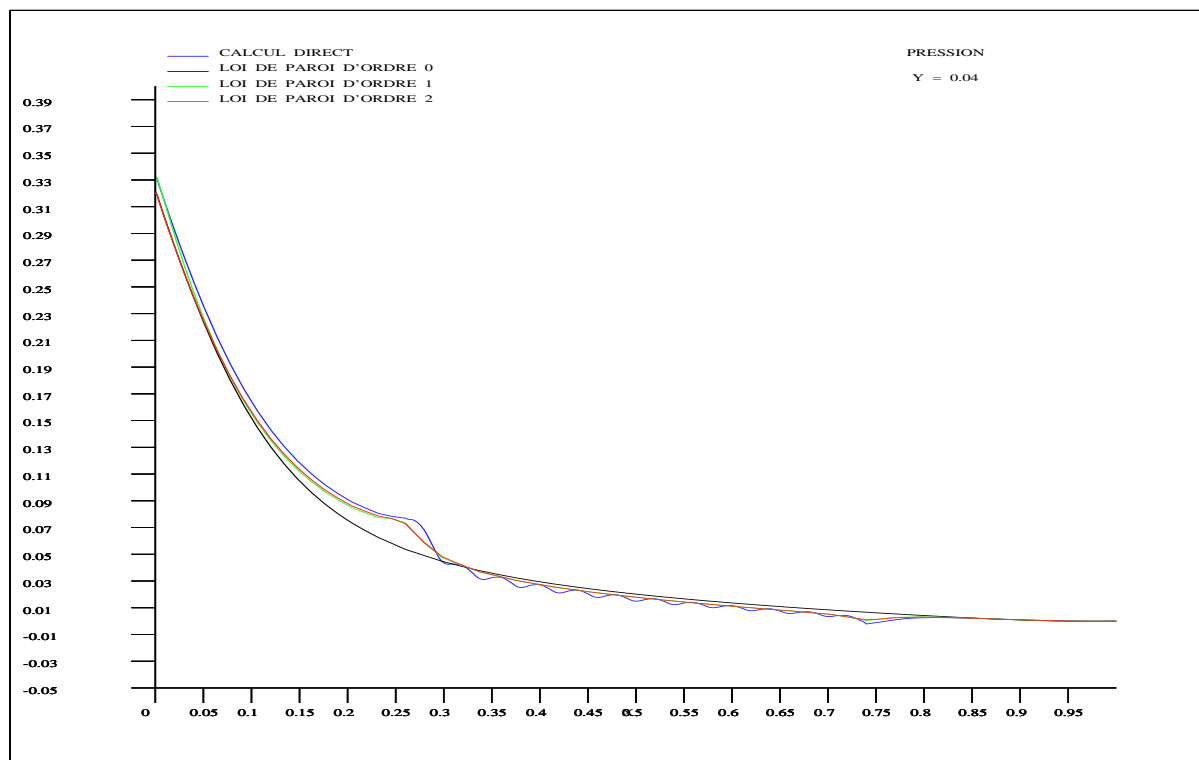
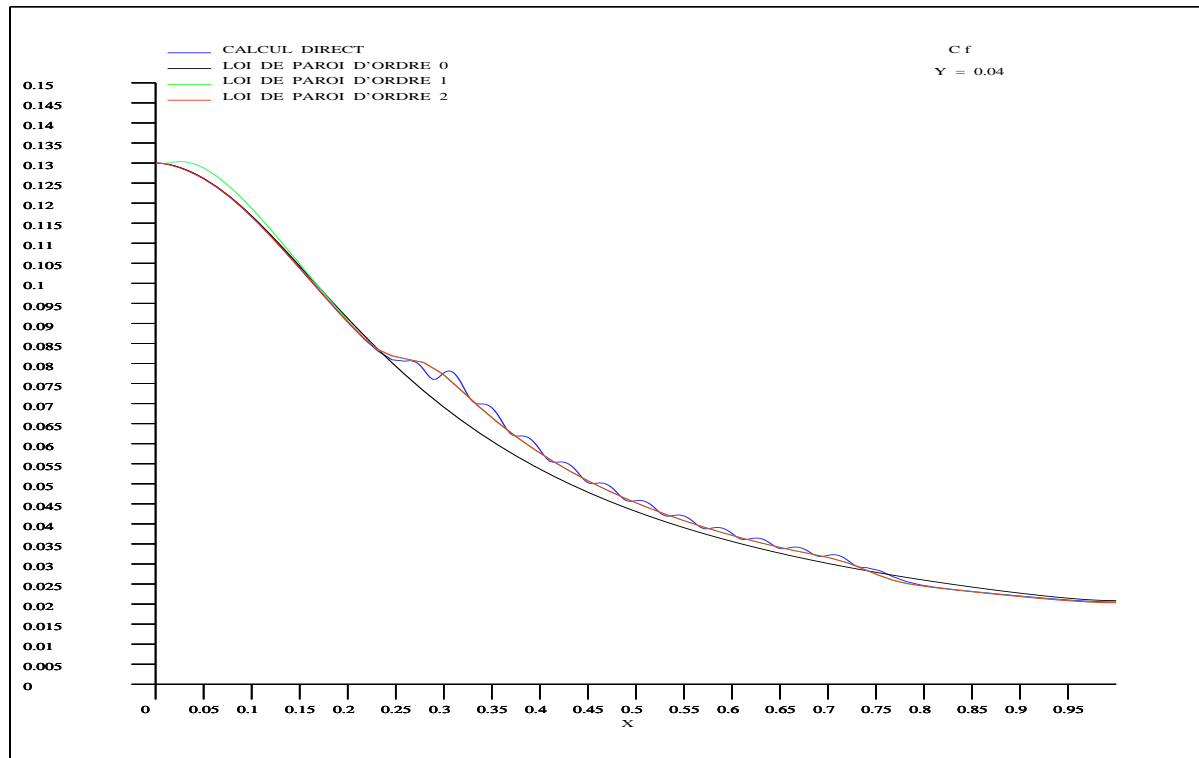


FIG. 26: Comparaison entre les lois de paroi d'ordre zéro, un, deux et le calcul direct à $Re=100$. Le profil du coefficient de friction et de pression est fait à partir des coupes à $\delta = 0.04$. Le passage à des approximations d'ordre supérieur, apporte une amélioration sensible.

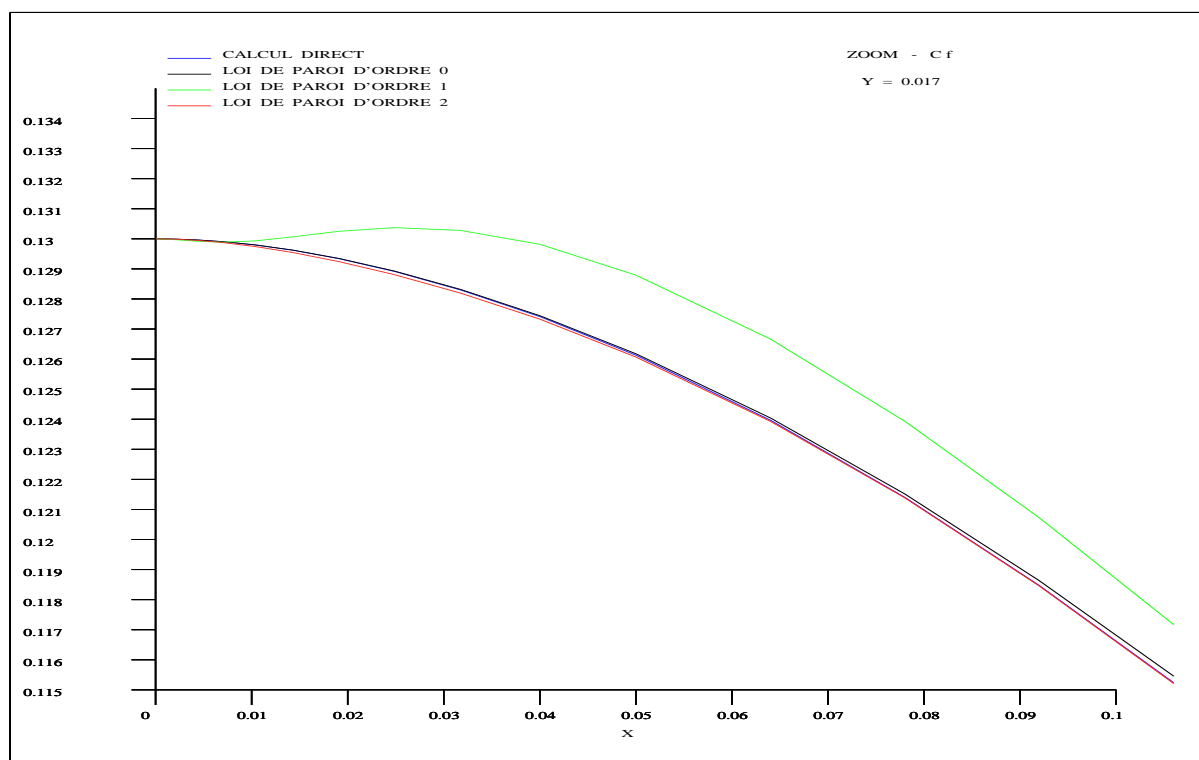
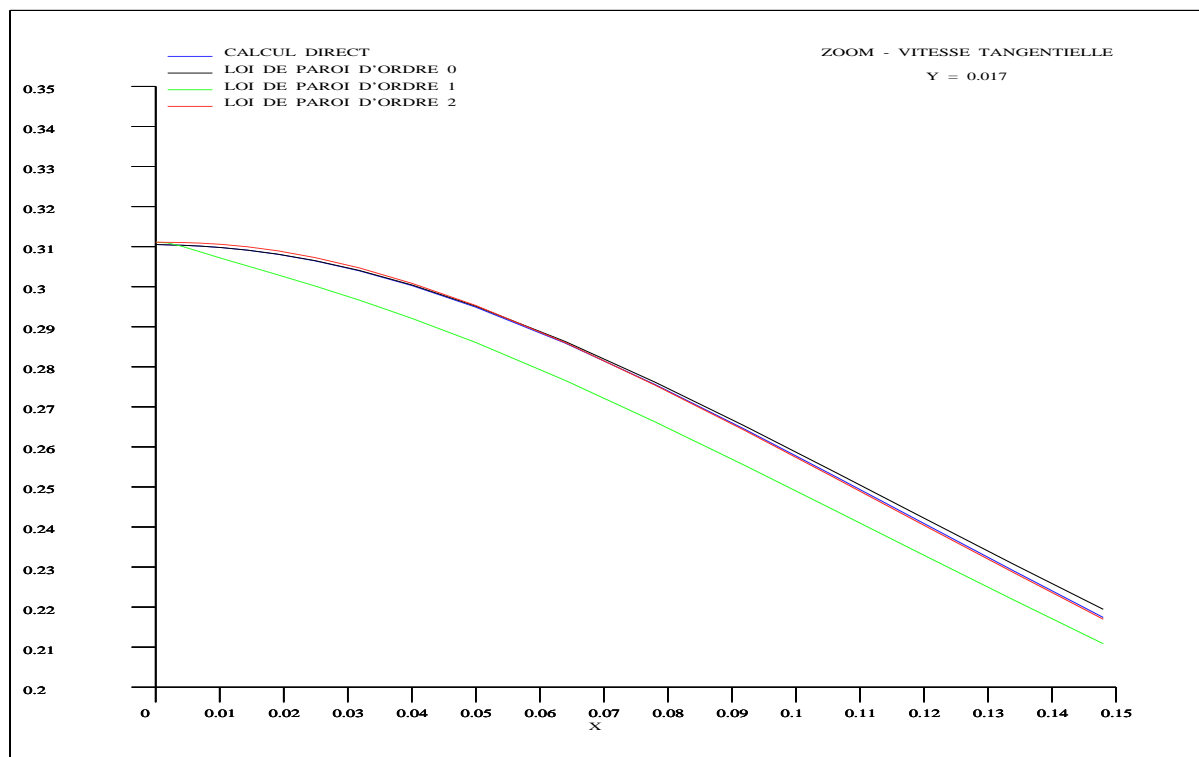


FIG. 27: L'utilisation de la loi de paroi d'ordre deux apporte une amélioration plus sensible à l'approximation de la solution exacte (zoom de la vitesse tangentielle à $\delta = 0.017$ à $Re=100$).

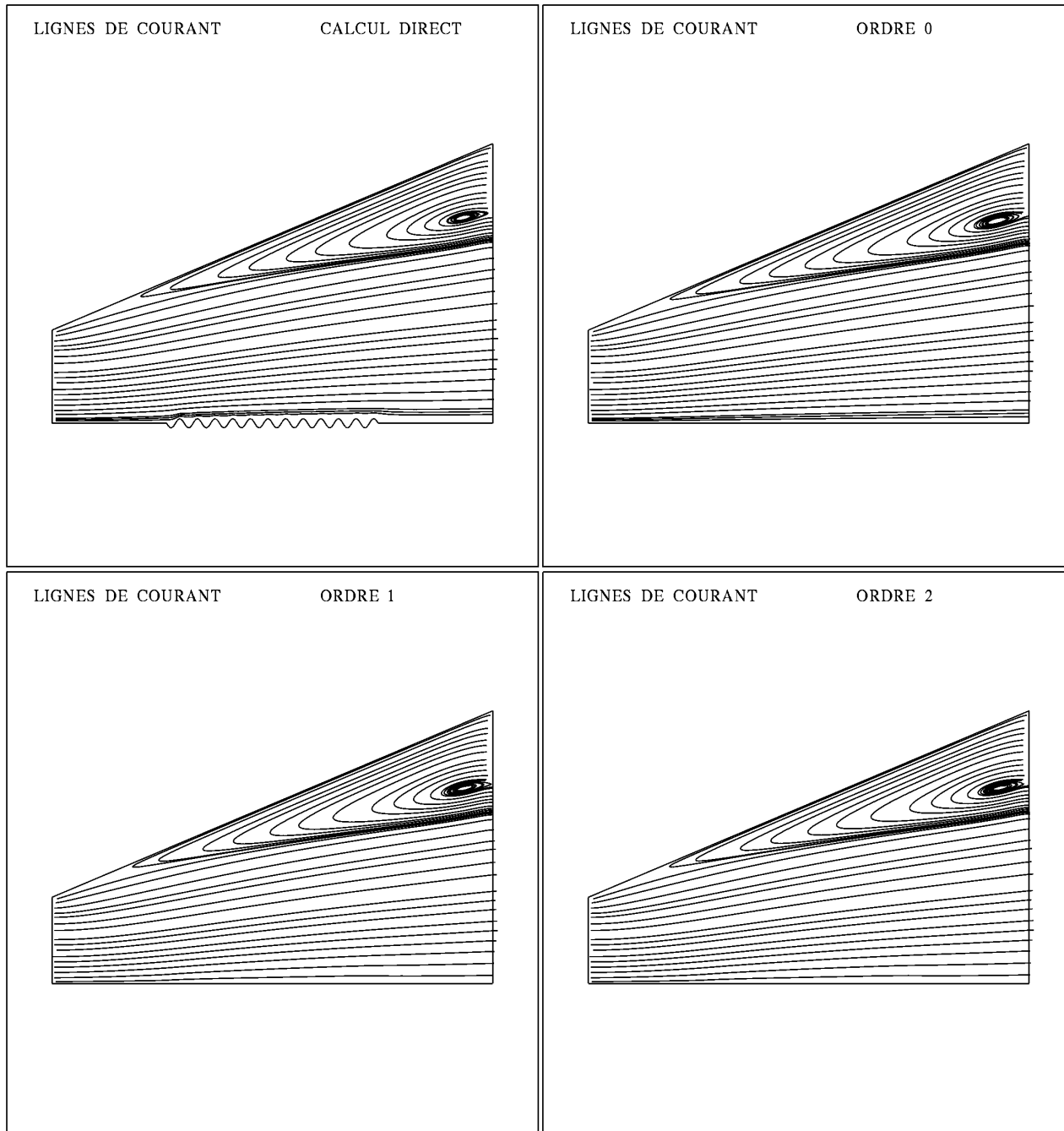


FIG. 28: Les lignes de courants par un calcul direct sur les rugosités et en utilisant les différentes lois de paroi à $Re=500$. Pour les lois de paroi d'ordre un et deux, la distance à la paroi est $\delta = 0.015$.

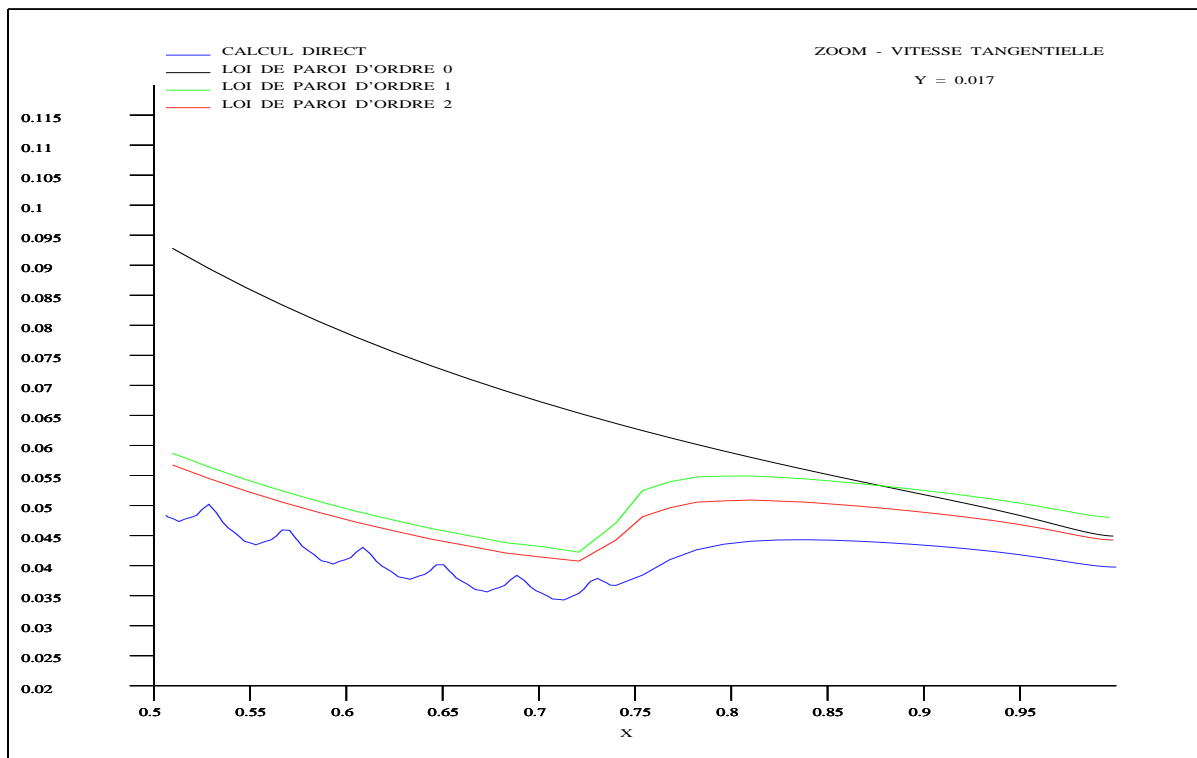
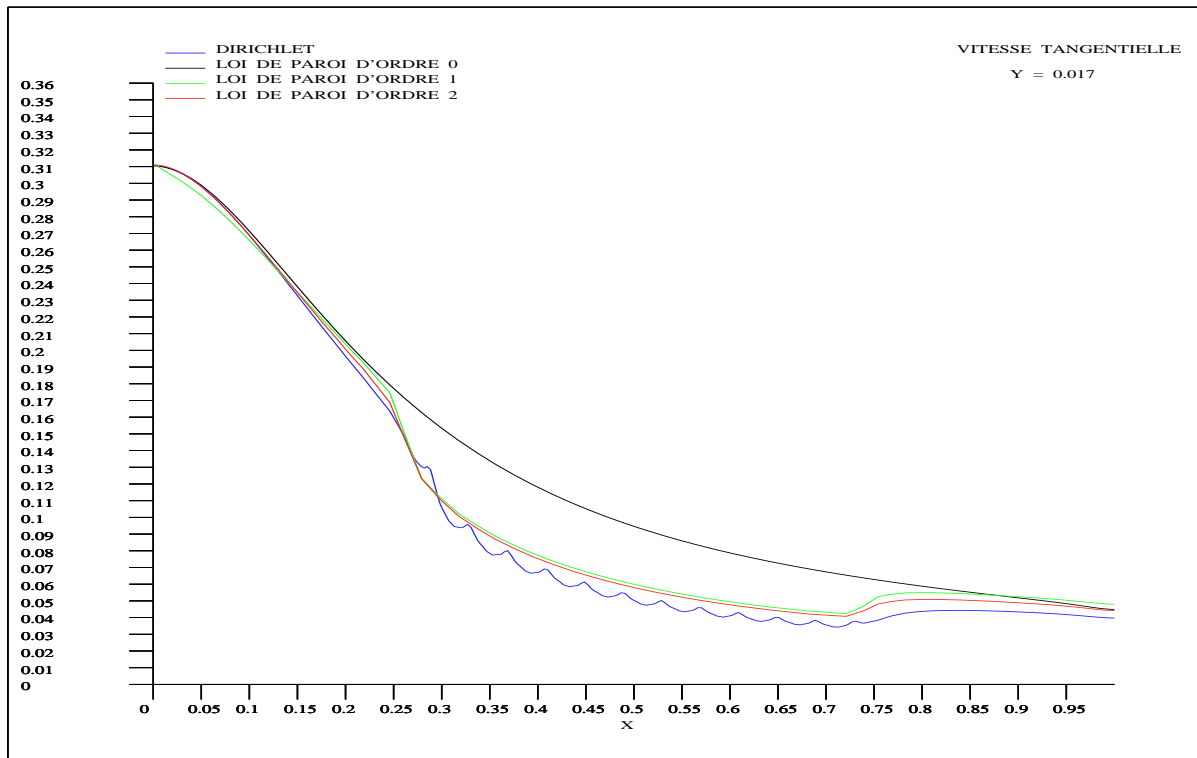


FIG. 29: Zoom de la vitesse tangentielle à $\delta = 0.017$ ($Re=500$). Les lois de paroi d'ordre élevé améliorent sensiblement l'approximation par rapport à l'ordre zéro. De plus, la loi de paroi d'ordre deux apporte une plus fine qualité d'approximation, même si, en raison du nombre de Reynolds élevé, ce problème reste à la limite de la théorie.

5.5 Plaque avec rugosités non-symétriques

On s'intéresse à l'application des lois de paroi sur une plaque contenant des rugosités non-symétriques. Les caractéristiques des problèmes, en fonction des conditions aux limites sont :

- $Re = 10^3$,
- condition de Dirichlet à l'entrée provenant d'un profil de vitesse développé sur plaque plane, Neumann homogène à la sortie et $\frac{\partial u^t}{\partial \mathbf{n}} = 0$ et $u^n = 0$ à l'infini.
- Les caractéristiques pour le calcul direct sont :
 - domaine $[-0.02, 1] \times [0, 0.5]$. Plaque plane commence à $x_1 = 0$ et plaque rugueuse à $x_1 = 0.18$,
 - condition de Dirichlet $\mathbf{u} = (0, 0)$ à la paroi,
 - 16 rugosités de dimensions $(\lambda, A) = (0.025, 0.025)$,
 - 6500 éléments Q1-Q1.
- Les caractéristiques avec la loi de paroi d'ordre zéro sont :
 - condition de Dirichlet $\mathbf{u} = (0, 0)$ à la paroi,
 - domaine $[-0.02, 1] \times [0, 0.5]$ plaque plane,
 - 2200 éléments Q1-Q1.
- Les caractéristiques avec la loi de paroi d'ordre un et deux sont :
 - domaine $[-0.02, 1] \times [0.025, 0.5]$ plaque plane,
 - loi de paroi d'ordre un ou deux imposée à la paroi,
 - 2200 éléments Q1-Q1.

Le problème de cellule avec le paramètre ε fixé à 2.5×10^{-2} se caractérise par :

- $Re = 25$,
- domaine $\Omega_{loc} \stackrel{approx}{=} [0, 1] \times [0, 5]$,
- rugosité de dimensions $(\lambda, A) = (1, 1)$,
- 2500 éléments Q1-Q1.

On résout les problèmes de Stokes dans les cellules (figures 31 et 32) et on obtient les constantes d'homogénéisation suivantes :

$$\bar{\chi}_{tt}^0 = 0.8411, \quad \bar{\chi}_{tt}^1 = -0.363 \text{ et } \quad \bar{\chi}_t^2 = 2.6 \times 10^{-4}.$$

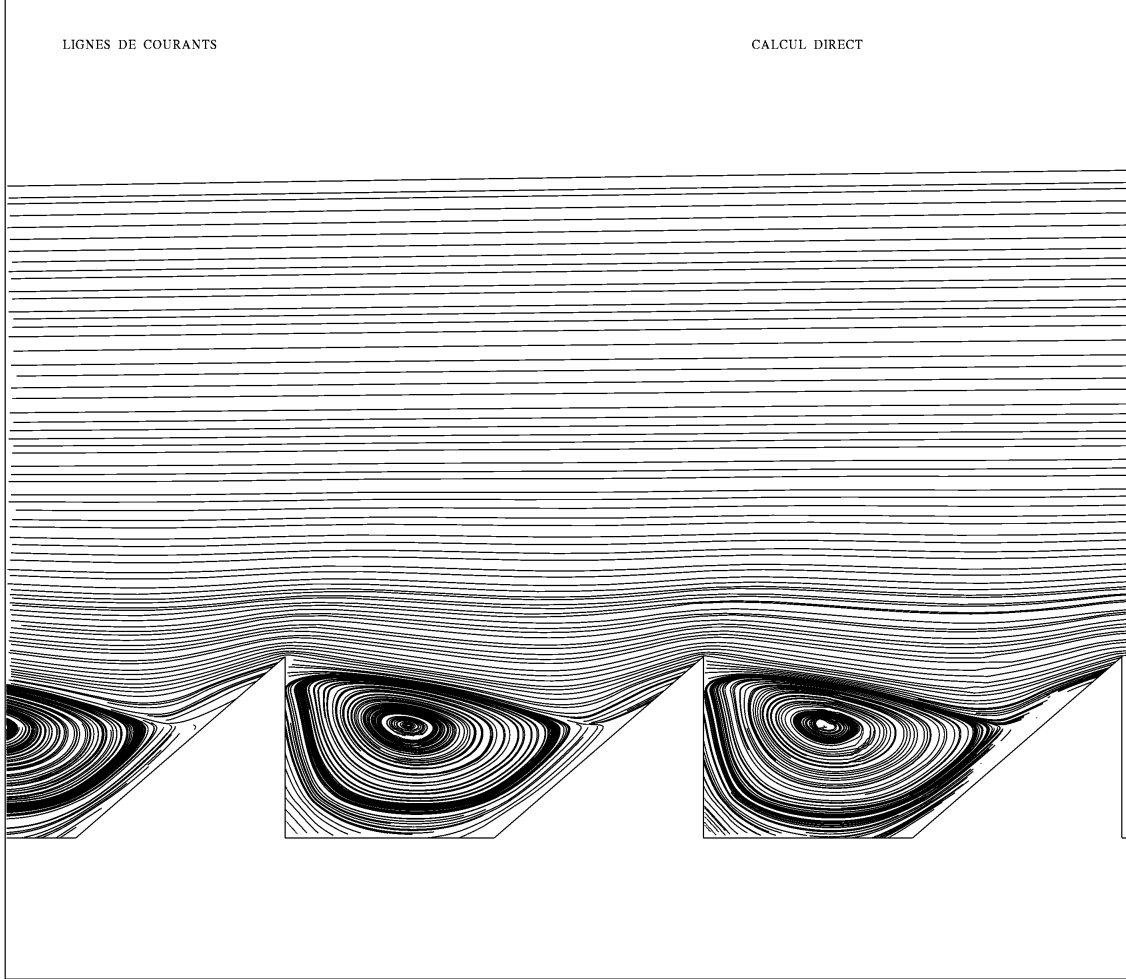


FIG. 30: *En raison de la dimension des rugosités, on retrouve des recirculations en aval des rugosités, et l'écoulement est décalé vers le haut.*

On impose les lois de paroi à $\delta = 0.025$. En raison des importantes dimensions des rugosités, on retrouve de grandes recirculations en aval. L'emploi de conditions aux limites d'ordre un et deux améliore sensiblement la qualité de l'approximation et on récupère les bons profils de C_f et de u^t (figures 34 et 35). L'amélioration apportée par l'approximation au deuxième ordre est ici négligeable, en raison de l'absence de gradients de pression. Même si les caractéristiques de l'écoulement sont à la limite de la théorie, les résultats sont convaincants.

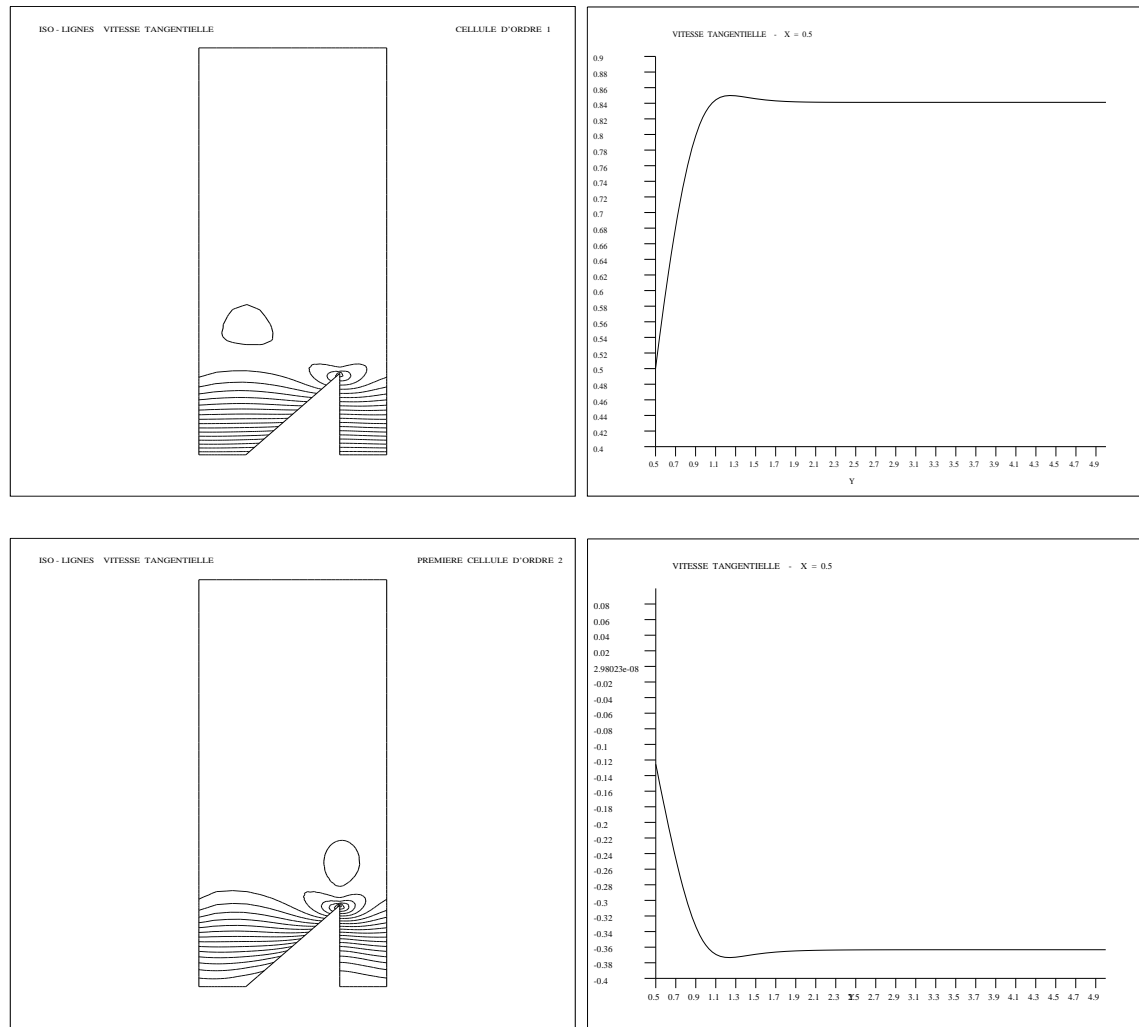


FIG. 31: *Solution du problème de cellule d'ordre un et du premier problème de cellule d'ordre deux.*

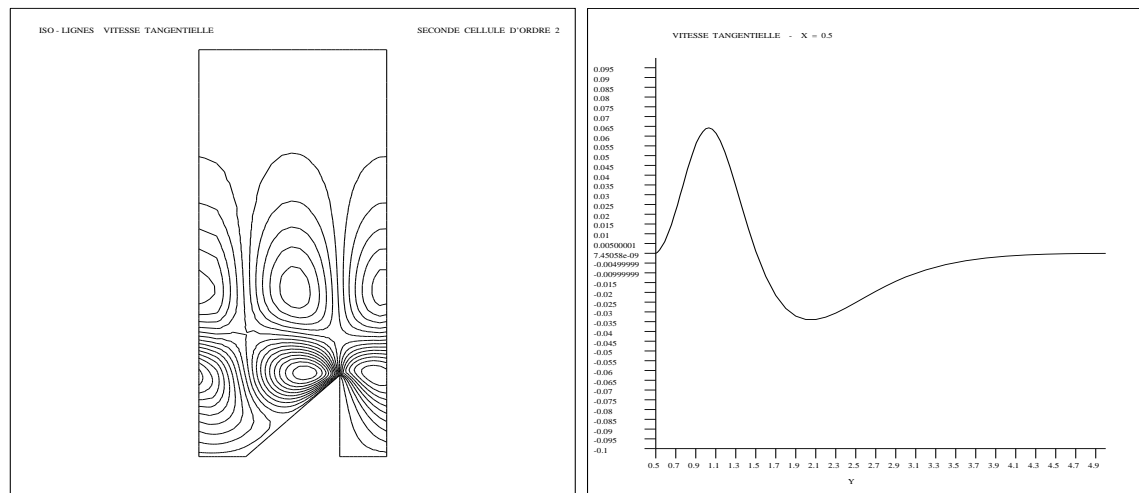


FIG. 32: *Solution du deuxième problème de cellule d'ordre deux.*

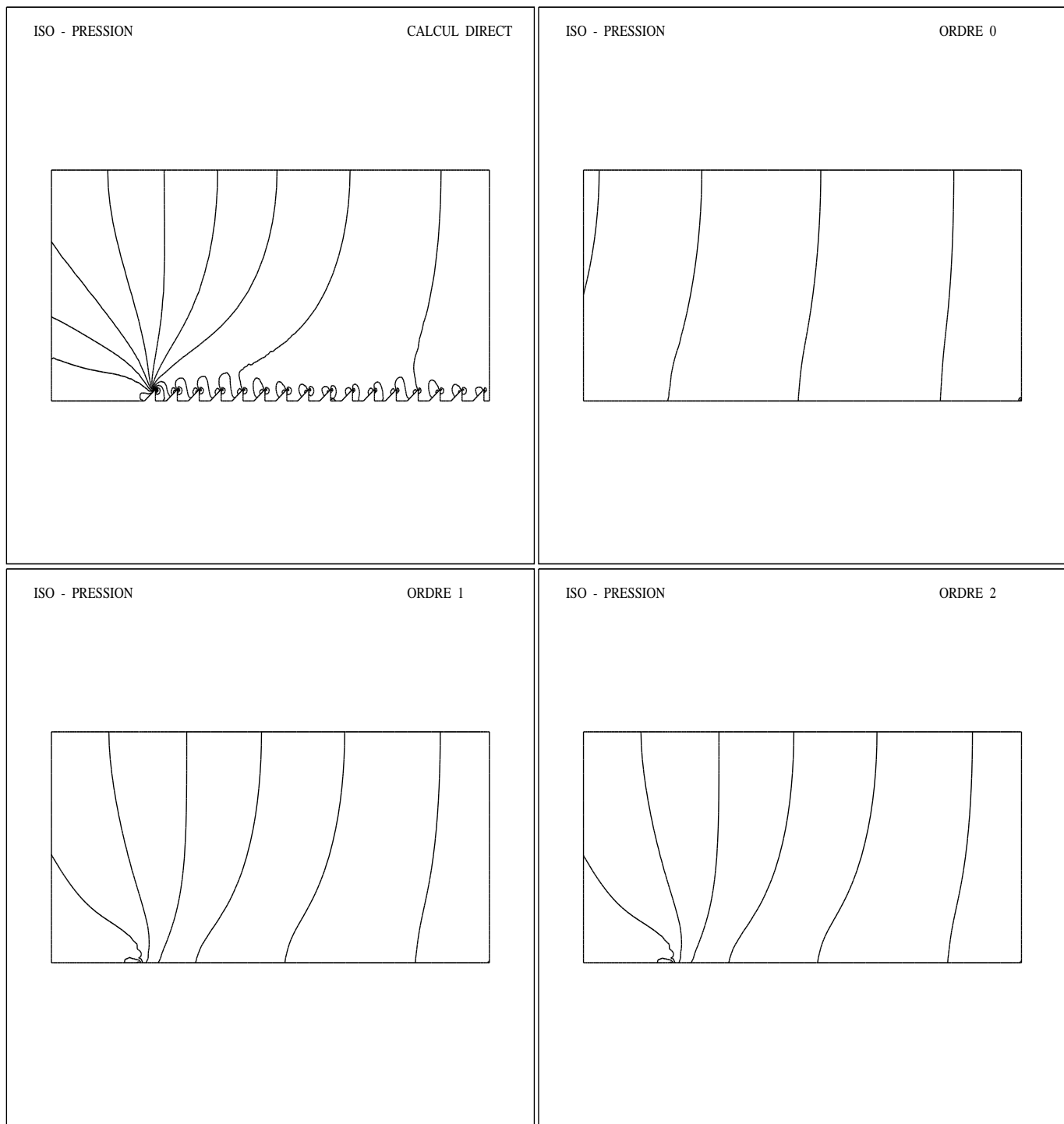


FIG. 33: Les isolignes de pression retrouvées avec les lois de paroi d'ordre 1 et 2 imposées à $\delta = 0.025$ s'approchent bien de la solution avec $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ à la paroi. Le domaine est constitué d'une plaque plane suivie d'une plaque rugueuse.

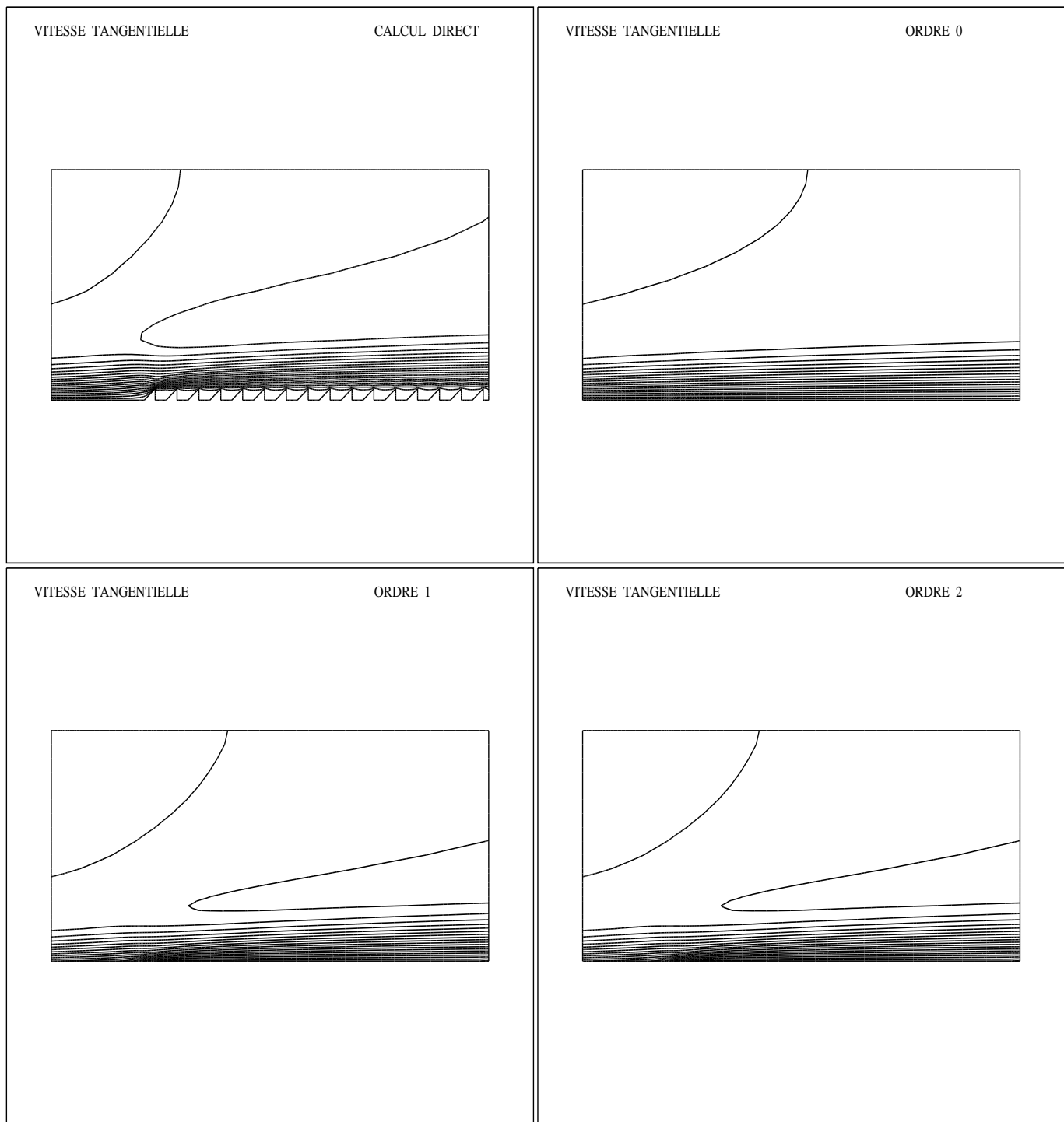


FIG. 34: Les isovaleurs de la vitesse tangentielle retrouvées avec les lois de paroi d'ordre 1 et 2 imposées à $\delta = 0.035$ s'approche bien de la solution avec $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ à la paroi.

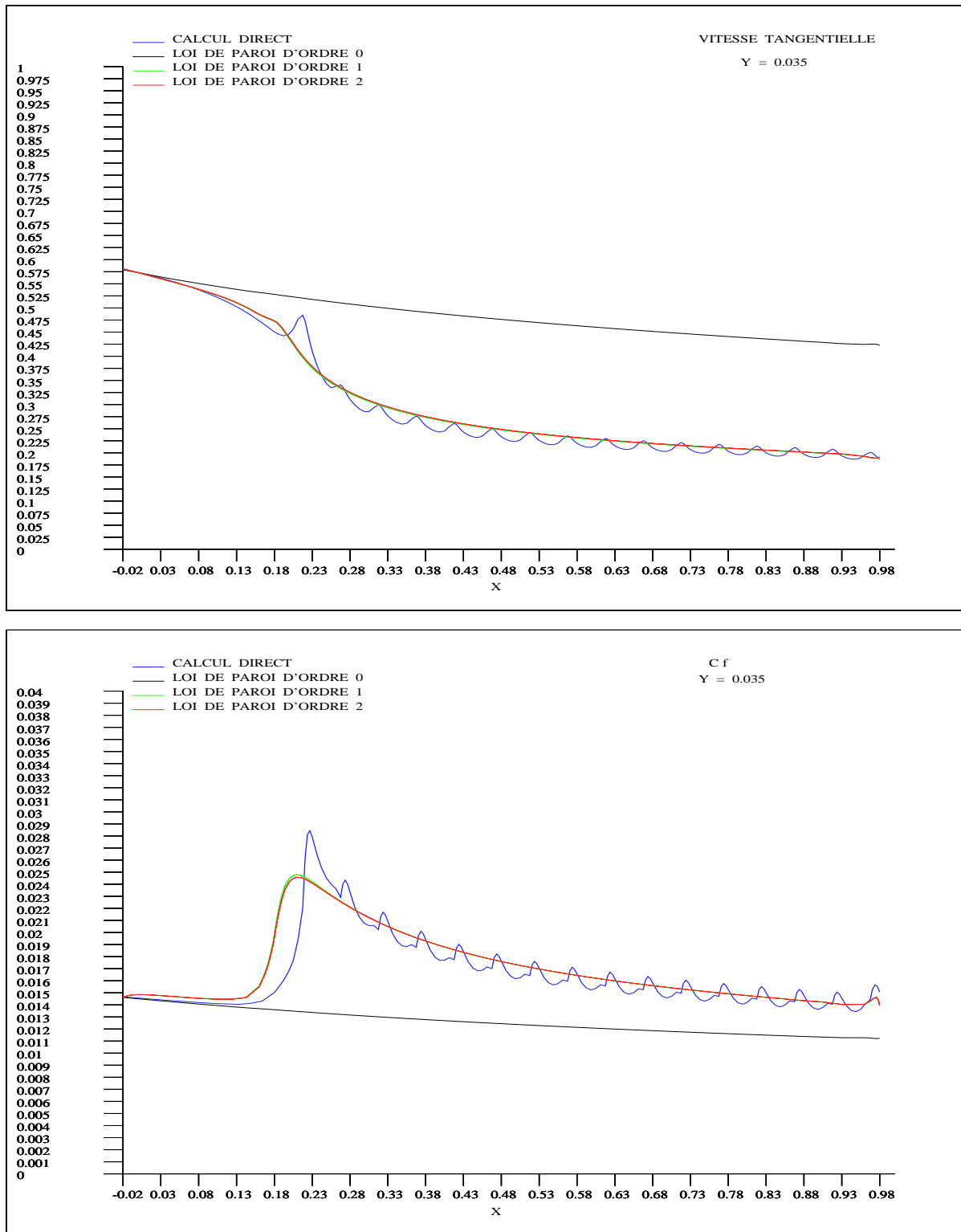


FIG. 35: Comparaison entre la vitesse tangentielle et le C_f à $\delta = 0.035$. L'utilisation des lois de paroi d'ordre élevé est essentiel pour bien approcher la solution obtenu par le calcul direct.

6 Conclusion

Dans ce travail, on a présenté une nouvelle stratégie pour développer des lois de paroi pour des domaines rugueux, basées sur la méthode de développement asymptotique à deux échelles (M.D.A.). Les lois de paroi construites par cette approche ont la caractéristique de s'adapter à la géométrie de la rugosité en simulant l'influence des petites échelles sur l'écoulement global.

L'approche par analyse asymptotique nous a permis de construire des lois de paroi non-linéaires. En effet, on a pu développer des lois de paroi d'ordre un et deux pour les équations de Navier-Stokes, contenant des termes de gradient de pression et des termes non-linéaires liés à la convection. Dans le cadre des équations linéaires, on a construit des lois de paroi d'ordre un et deux pour le problème de Laplace, et une analyse d'erreur a été effectuée. Les lois de paroi construites par cette nouvelle méthodologie sont indépendantes du choix de la hauteur, puisque les constantes d'homogénéisation varient en fonction de la hauteur du couplage. Les valeurs des constantes sont obtenues en résolvant simplement un problème linéaire dans une cellule.

Les validations numériques ont été faites en résolvant plusieurs problèmes de Navier-Stokes dans divers domaines, contenant différentes géométries de rugosités. On a remarqué l'importance de l'utilisation des lois de paroi d'ordres élevés pour retrouver les bons profils de pression et de C_f à l'interface plaque plane - plaque rugueuse et pour récupérer le décalage du profil de vitesse. La nécessité de l'utilisation des lois de paroi d'ordre deux a été mise en évidence pour des problèmes contenant de forts gradients de pression. En effet, le terme de gradient de pression dans la loi de paroi apporte une correction plus sensible sur les profils de vitesse et friction. L'influence du terme non-linéaire dans la loi de paroi d'ordre deux n'a pas apporté d'amélioration significative sur les approximations, certainement en raison du comportement laminaire des écoulements.

La méthodologie est très flexible pour traiter différentes formes de rugosités et l'implémentation numérique des lois de paroi, prise de façon faible, est immédiate. Le gain sur le maillage et, en conséquence, sur le temps de calcul, est sensible. Les lois de paroi nous permettent d'utiliser des maillages de quatre à cinq fois plus grossiers comparés à ceux utilisés dans un calcul direct, en gardant une excellente précision.

En conclusion, on a introduit un nouveau cadre mathématique pour développer des lois de paroi en mécanique des fluides. Cette stratégie allie de bons fondements théoriques à d'excellents résultats numériques obtenus à faible coût. L'utilisation des lois de paroi constitue une alternative pratique pour baisser le coût du calcul dans des problèmes comprenant différentes échelles de longueur. Cette approche pourra, par la suite, être appliquée au développement de lois de paroi pour des écoulements à plus grand Reynolds et en particulier, pour des modèles de turbulence du type $k - \varepsilon$.

7 Annexe : Étude du problème de cellule

7.1 Existence et unicité

Soit Y une cellule et $Y^\delta = Y \cap \{y_2 \leq \delta\}$, avec ∂Y et ∂Y^δ ses contours ayant la partie sur la paroi notée ∂Y_w (respectivement ∂Y_w^δ). On introduit $S_{per}(Y)$ l'espace des fonctions définies dans Y de décroissance rapide en variable y_2 , 2π -périodique en variable y_1 . On définit par $L_{per}^2(Y)$ l'espace des fonctions dans Y , 2π -périodique en variable y_1 et de carré intégrable dans Y , et par $H_{per}^1(Y) \subset L_{per}^2(Y)$ l'espace des fonctions ayant les dérivées premières dans $L_{per}^2(Y)$. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 1

Il existe une unique paire de fonctions (χ, ρ) et un unique vecteur $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^2$ tels que $\chi - \bar{\chi} \in (H_{per}^1(Y))^2 \cap (S_{per}(Y))^2$, $\rho \in L_{per}^2(Y) \cap S_{per}(Y)$ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu_0 \Delta_{\mathbf{y}} \chi + \nabla_{\mathbf{y}} \rho = 0 & \text{dans } Y, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \chi = 0 & \text{dans } Y, \\ \chi = \begin{bmatrix} y_2 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{sur } \partial Y_w, \\ \chi - \bar{\chi} \in (S_{per}(Y))^2, \quad \rho \in S_{per}(Y) & \end{array} \right. \quad (64)$$

au sens faible.

Démonstration :

La démonstration consiste à étudier un problème équivalent obtenu en tronquant la cellule Y dans la direction y_2 . Pour simplifier les notations, on assume $\nu_0 = 1$ et on note par Σ_δ la section $\partial Y^\delta \cap \{y_2 = \delta\}$. On suppose que (64) a une solution (χ, ρ) . Alors dans $y_2 \geq \delta$, ces fonctions peuvent être prolongées à l'aide d'un développement de Fourier dans la variable y_1 :

$$\chi_t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi_{t,k} e^{iky_1}, \quad \chi_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi_{n,k} e^{iky_1}, \quad \rho = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho_k e^{iky_1}.$$

Comme les équations de Stokes sont homogènes dans $y_2 \geq \delta$, on obtient le système d'équations différentielles ordinaires pour le $k^{ème}$ coefficient de Fourier ($k \neq 0$) de χ et ρ suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\chi_{t,k}'' + k^2 \chi_{t,k} + ik \rho_k = 0, \\ -\chi_{n,k}'' + k^2 \chi_{n,k} + \rho_k' = 0, \\ ik \chi_{t,k} + \chi_{n,k}' = 0. \end{array} \right.$$

La solution de ce système peut être calculée si $\chi_k(\delta)$ est connu. En effet, on a

$$\begin{aligned} \chi_{t,k} &= (\chi_{t,k}(\delta) + k(-\operatorname{sgn}(k)) \chi_{t,k}(\delta) - i \chi_{n,k}(\delta)(y_2 - \delta)) e^{-k(y_2 - \delta)}, \\ \chi_{n,k} &= (\chi_{n,k}(\delta) + k(-i \chi_{t,k}(\delta) + \operatorname{sgn}(k) \chi_{n,k}(\delta))(y_2 - \delta)) e^{-k(y_2 - \delta)}, \\ \rho_k &= 2k(\operatorname{sgn}(k) \chi_{n,k}(\delta) - i \chi_{t,k}(\delta)) e^{-k(y_2 - \delta)}. \end{aligned} \quad (65)$$

Évidemment, on a que $\chi_{t,0}$ et $\chi_{n,0}$ ne dépendent pas de y_2 . De plus, la pression ρ est définie à une constante prêt.

Cela permet immédiatement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_{t,k}}{\partial y_2} &= k (-2\chi_{t,k} - i \operatorname{sgn}(k) \chi_{n,k}) \quad \text{sur } \Sigma_\delta, \\ \frac{\partial \chi_{n,k}}{\partial y_2} - \rho &= k (2\chi_{n,k} + i \operatorname{sgn}(k) \chi_{t,k}) \quad \text{sur } \Sigma_\delta. \end{aligned}$$

Donc, nous avons la condition aux limites équivalente

$$-\frac{\partial \chi}{\partial y_2} + \rho = T\chi \quad \text{sur } \Sigma_\delta,$$

où $T : \left(H_{per}^{\frac{1}{2}}(\Sigma_\delta)\right)^2 \rightarrow \left(H_{per}^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_\delta)\right)^2$ est un opérateur intégro-différentiel défini par

$$T\chi = \begin{pmatrix} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k (2\chi_{t,k}(\delta) + i \operatorname{sgn}(k) \chi_{n,k}) e^{iky_1} \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (2\chi_{n,k}(\delta) - i \operatorname{sgn}(k) \chi_{t,k}) e^{iky_1} \end{pmatrix}.$$

La démonstration revient à montrer qu'il existe une unique solution $\chi \in \left(H_{per}^1(Y^\delta)\right)^2$, $\rho \in L_{per}^2(Y^\delta)$ du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu_0 \Delta_y \chi + \nabla_y \rho = 0 & \text{dans } Y^\delta, \\ \nabla_y \cdot \chi = 0 & \text{dans } Y^\delta, \\ \chi = \begin{bmatrix} y_2 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{sur } \partial Y_w^\delta, \\ -\frac{\partial \chi}{\partial y_2} + \rho = T\chi & \text{sur } \Sigma_\delta, \end{array} \right. \quad (66)$$

pour après les étendre à toute la cellule Y par la formule (65).

On va démontrer l'existence et l'unicité pour le problème (66). Soit H l'espace

$$H = \left\{ \chi \in \left(H_{per}^1(Y^\delta)\right)^2, \nabla_y \cdot \chi = 0 \text{ dans } Y^\delta \right\}$$

et

$$H_0 = \left\{ \chi \in H, \chi = 0 \text{ dans } Y_w^\delta \right\}.$$

Soit $\tilde{\chi} = \chi - \begin{bmatrix} y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, alors $\tilde{\chi} \in H_0$ satisfait

$$\int_{Y^\delta} \nabla_y \tilde{\chi} \nabla_y \bar{\eta} + \langle T\tilde{\chi}, \bar{\eta} \rangle = - \int_{\Sigma_\delta} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{\eta}, \quad \forall \eta \in H_0. \quad (67)$$

La forme linéaire (67) est hermitienne positive définie et donc coercive. Alors, le problème (66) a une unique solution avec la partie imaginaire clairement nulle, puisque $\langle T\tilde{\chi}, \tilde{\chi} \rangle = \int_{\Sigma_\delta} T\tilde{\chi}$. $\tilde{\chi}$ est réel.

□

7.2 Constante d'homogénéisation

Il est possible d'obtenir des bornes inférieures et supérieures pour la constante d'homogénéisation :

Proposition 2

Soient $H_{\min} = \min(y_2 \in \partial Y)$ et $H_{\max} = \max(y_2 \in \partial Y)$. Alors la constante $\bar{\chi}_t$ satisfait les bornes

$$H_{\min} \leq \bar{\chi}_t \leq H_{\max}.$$

Démonstration :

Soit H une constante plus grande que H_{\max} . Par la démonstration du théorème précédent, on a

$$-2\pi(\bar{\chi}_t - H) = \int_{Y^\delta} \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\chi} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\chi} + \langle T\tilde{\chi}, \tilde{\chi} \rangle \geq 0,$$

par la positivité de l'opérateur T . Donc, $\bar{\chi}_t \geq H$ et on obtient la borne supérieure en faisant tendre H vers H_{\max} .

Pour l'obtention de la borne inférieure, d'abord on note que la formulation variationnelle pour $\chi - \begin{bmatrix} y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ est l'équation de Euler pour le problème de minimization :

$$\inf_{\xi \in H_0} \frac{1}{2} \left(\int_{Y^\delta} \nabla_{\mathbf{y}} \xi \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \xi + \langle T\xi, \xi \rangle \right) + \int_{\Sigma_\delta} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xi, \quad (68)$$

et la contante $\bar{\chi}_t$ peut être retrouvée par

$$\pi(\bar{\chi}_t - H) = \inf_{\xi \in H_0} \frac{1}{2} \left(\int_{Y^\delta} \nabla_{\mathbf{y}} \xi \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \xi + \langle T\xi, \xi \rangle \right) + \int_{\Sigma_\delta} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xi. \quad (69)$$

Soit \tilde{Y}^δ le domaine $\tilde{Y}^\delta = (0, 2\pi) \times (H_{\min}, H)$ et \tilde{H}_0 l'espace

$$\tilde{H}_0 = \left\{ \xi \in H_{per}^1(\tilde{Y}^\delta) \mid \nabla \cdot \xi = 0 \text{ et } \xi(y_1, H_{\min}) = 0 \right\}.$$

Clairement H_0 est un sous-espace de \tilde{H}_0 , par prolongement des fonctions par zéro. Alors,

$$\pi(\bar{\chi}_t - H) \geq \inf_{\xi \in \tilde{H}_0} \frac{1}{2} \left(\int_{Y^\delta} \nabla_y \xi \cdot \nabla_y \xi + \langle T\xi, \xi \rangle \right) + \int_{\Sigma_\delta} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xi. \quad (70)$$

Finalement, on remarque que l'infimum est atteint par la fonction $\begin{bmatrix} H_{\min} - y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ avec la valeur $\pi(H_{\min} - H)$ et le résultat suit.

□

Références

- [1] Y. Achdou. Effet d'un mince revêtement métallisé sur la réflexion d'une onde électromagnétique. *C.R. Académie des Science, Paris*, t.314(Série I):217–222, 1992. for more complete version, INRIA report 1136, 1989.
- [2] Y. Achdou and O. Pironneau. Analysis of wall laws. *C.R. Académie des Science, Paris*, t.320(Série I):541–547, 1995, for more complete version, Paris VI Report R94018, 1994.
- [3] Y. Achdou, O. Pironneau, and F. Valentin. Effective boundary conditions for high reynolds flows over periodic rough boundaries: Obtention and numerical validation. *submited to Journal of Computational Physics*.
- [4] Y. Achdou, O. Pironneau, and F. Valentin. Etude des lois de parois d'ordre 1 et 2 pour des domaines rugueux par décomposition de domaine. Technical Report 2306, INRIA, December 1997.
- [5] Y. Achdou, O. Pironneau, and A. Zebic. Effective boundary conditions for thin coating. Technical Report R94001, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1994.
- [6] Y. Achdou, P. Le Tallec, F. Valentin, and O. Pironneau. Constructing wall laws with domain decomposition or asymptotic expansion techniques. *Comput. Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (151):215–232, 1998.
- [7] A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North Holland, 1983.
- [8] J. Bourgat. Méthode d'homogénéisation des opérateurs à coefficients périodiques : étude des correcteurs provenant du développement asymptotique. Technical report, INRIA, 1978.
- [9] J. Bourgat. Numerical experimentals of the homogeneization method for operators with periodic coefficients. Technical report, INRIA, Janvier 1978.
- [10] A. Carrau. *Modélisation numérique d'un écoulement sur paroi rugueuse*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 1992.

- [11] A. Carrau, G. Galice, and P. Le Tallec. Taking into account surface roughness in computing hypersonic reentry bodies. *Applied Sciences and Engineering, R. Glowinski eds, Nova Science publisher*, pages 331–344, 1992.
- [12] J. Cousteix. *Couches limites laminares*. Cepandues-Editions, France, 1989.
- [13] J. Cousteix. *Turbulence et couches limites*. Cepandues-Editions, France, 1989.
- [14] G. Dury and Alziary de Roquefort. Couche limite turbulente sur paroi rugueuse en régime supersonique. Technical report, CEAT, September 1995.
- [15] V. Girault and P. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*. Springer-Verlag, 1986.
- [16] F. Glikson. *Couche limite sur paroi rugueuse*. PhD thesis, L'école Nationale supérieur de l'aéronautique et de l'espace - ONERA-CERT Poitiers, Décembre 1996.
- [17] B. Mohammadi and G. Medic. A critical evaluation of the classical $k - \varepsilon$ model and wall-laws for unsteady flows over bluff bodies. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, to appear.
- [18] B. Mohammadi and O. Pironneau. Unsteady separated turbulent flows computation with wall-laws and $k - \varepsilon$ model. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, (148):393–405, 1997.
- [19] J. Nikuradse. Law of flow un rough pipes. Technical report, National Advisory Commitee for Aeronautics NACA TM 1292.
- [20] L. Prandtl and H. Schlichting. Das widerstandgesetz rauther platten. *Werft Reederi*, 15, 1934.
- [21] E. Sanches-Palencia. Ecoulement d'un fluide à travers une paroi perforée. Technical Report 57, Colection de la direction des études et recherches d'E.D.F., 1985.
- [22] H. Schlichting. *Boundary-layer theory*. McGraw-Hill, 1979.
- [23] R. Teman. *Navier-Stokes equations*. North Holland, 1979.
- [24] R. Teman. *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*. Society-for industrial and applied mathematics, 1995.
- [25] F. Valentin, P. Le Tallec, and B. Mohammadi. Simulation des écoulements compressibles turbulents sur parois rugueuses. Technical Report 3108, INRIA, February 1997.



Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399